КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.

Теорема о двух гвоздях

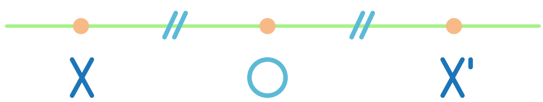
ЛЕММА

Лемма — это «маленькая подготовительная теорема».

ПУСТЬ движение g оставляет на месте одну точку O: $g(O)=O$.

ТОГДА для всех остальных точек $(\forall X)$ возможны только два варианта:

- либо остаться на месте: $g(X)=X$,
- либо «перепрыгнуть» через точку O на то же расстояние: $g(X)=X'$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

По определению, движение должно сохранять расстояния между точками. Точка O останется на месте, а новое положение точки X должно быть на том же расстоянии от точки O, что и до движения.
Значит, есть всего два варианта: либо остаться на месте, либо «перепрыгнуть» на то же расстояние.

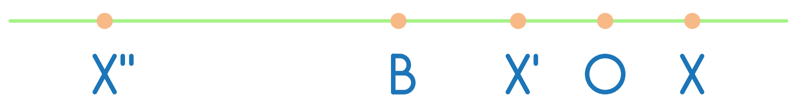
ТЕОРЕМА О ДВУХ ГВОЗДЯХ

ПУСТЬ движение g оставляет на месте две различные точки O и B: $g(O)=O$, $g(B)=B$.

ТОГДА все остальные точки прямой тоже остаются на месте, то есть g является тождественным отображением: $g=\mathrm{Id}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

Id — тождественное отображение (все точки остаются на месте).



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

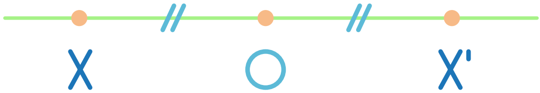
Рассмотрим произвольную точку X. Согласно Лемме, т. X либо останется на месте, либо «перепрыгнет» через неподвижную точку на то же расстояние. Но если т. X «перепрыгнет» через т. O в т. X', то расстояние до т. B изменится. Аналогично, если т. X «перепрыгнет» через т. B в т. X'', то расстояние до т. O изменится. Значит, возможен только первый вариант: остаться на месте. А раз точка X — произвольная, то на месте остаются все точки прямой.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Теорема об отражениях

ТЕОРЕМА ОБ ОТРАЖЕНИЯХ

ПУСТЬ движение g оставляет на месте одну точку O и не является тождественным отображением: $g(O)=O$, $g\neq \mathrm{Id}$.

ТОГДА g является отражением относительно точки O: $g=S_O$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Выберем произвольную точку X.

Согласно Лемме, точка X может либо остаться на месте, либо переместиться в точку X' (находящуюся на том же расстоянии, но с другой стороны от точки O).

Если точка X осталась на месте, то, согласно Теореме о двух гвоздях, все точки должны остаться на месте (так как $g(O)=O$ и $g(X)=X$).

Но $g\neq \mathrm{Id}$ по условию. Значит, единственный возможный вариант для точки X — «перепрыгнуть» через точку O. А раз точка X — произвольная, движение g является отражением относительно точки O.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Взаимно-однозначное отображение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если $g(X) = Y$, то
т. Y — **образ** точки X,
т. X — **прообраз** точки Y.

Преобразование (отображение) называется **взаимно-однозначным**, если выполняются следующие свойства:

1. ИНЪЕКЦИЯ (вложение): разные точки переходят в разные, то есть преобразование не «склеивает» точки.
2. СЮРЬЕКЦИЯ (наложение): преобразование покрывает всю прямую, то есть для любой точки можно найти ее прообраз.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Движение является взаимно-однозначным отображением.

Это утверждение можно представить в виде двух лемм:

ЛЕММА 1 (ИНЪЕКТИВНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ):

Если g — движение, то для любых различных точек A и B выполняется $g(A) \neq g(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Если точки A и B различны, то между ними есть ненулевое расстояние. По определению движения, ненулевое расстояние должно сохраниться, значит, $g(A) \neq g(B)$.

ЛЕММА 2 (СЮРЬЕКТИВНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ):

Если g — движение, то для любой точки Y существует точка X такая, что $g(X) = Y$.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Доказательство сюрьективности движения

ЛЕММА 2 (СЮРЬЕКТИВНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ)

Если *g* — движение, то для любой точки *Y* существует точка *X* такая, что *g*(*X*) = *Y*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим произвольную точку ***Y*** и найдем ее прообраз.

Зафиксируем две точки ***A*** и ***B***. При движении ***g*** т.***A*** переходит в ***gA***, а т.***B*** переходит в ***gB***.

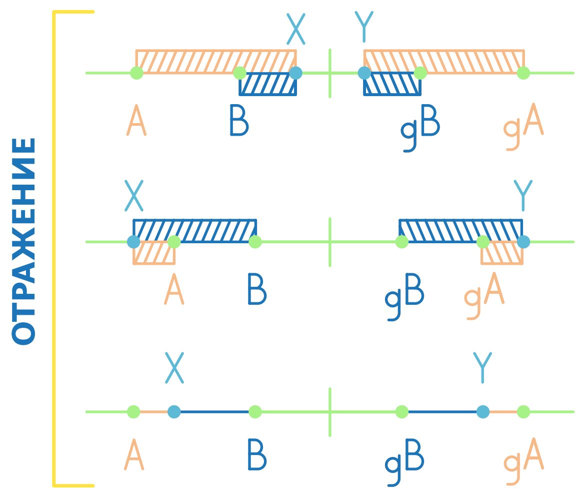
Легко убедиться, что любая точка однозначно задается расстояниями до двух других фиксированных точек.

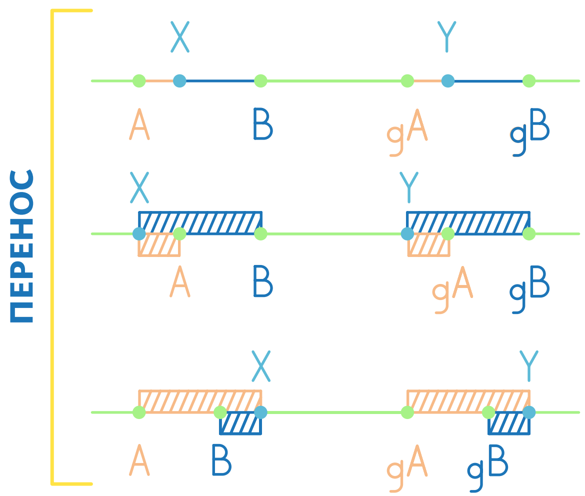
Следовательно, существует единственная точка на прямой, у которой расстояние до т.***A*** равно расстоянию между т.***Y*** и ***gA***, а расстояние до т.***B*** равно расстоянию между т.***Y*** и ***gB***.

Это и есть точка ***X***, которая при движении ***g*** переходит в т.***Y***, обеспечивая сохранение расстояний.

Точка ***Y*** выбрана произвольно, значит, у каждой точки есть один и только один прообраз.

*Варианты расположения точек **A**, **B**, **gA**, **gB**, **Y** на прямой:*





*Во всех случаях пара расстояний от **gA** и **gB** до т.**Y** определит т.**X** однозначно.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Обратное отображение

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

*Если **g** — отображение,*
то g^{-1} — обратное отображение.

По **определению обратного отображения:**
если $g(X)=Y$, то $g^{-1}(Y)=X$.

Основываясь на том, что движение является взаимно-однозначным отображением, построим отображение, обратное к движению, и докажем, что оно тоже является движением.

Чтобы построить обратное отображение, мы должны определить, куда при g^{-1} перейдет произвольная точка Y.

Для этого нужно найти ту единственную точку X, которая при движении g переходила в т.Y.

В Лемме 2 (сюрьективность движения) мы установили, что любая точка имеет один и только один прообраз.

Поэтому g^{-1} задано однозначно и определено для всех точек прямой: если $g(X)=Y$, то $g^{-1}(Y)=X$.

Отсюда вытекает свойство движения g^{-1}:

$$g^{-1}\circ g=g\circ g^{-1}=\mathrm{Id}$$

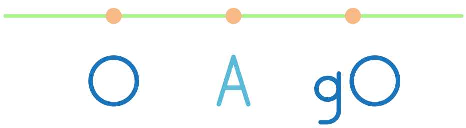
g^{-1} также является движением, так как движение g сохраняет расстояния между точками, а g^{-1} «возвращает точки на место».

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.

Теорема о переносах. Часть 1 из 2

ПУСТЬ движение g не оставляет на месте ни одной точки.

ТОГДА g является переносом на некоторый вектор.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Отметим на прямой некоторую т.O.
Неподвижных точек нет, значит, т.O перешла в другую точку — gO. Отметим т.A как середину между точками O и gO.

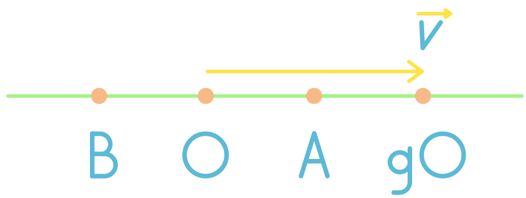
Рассмотрим композицию $S_A \circ g$ и посмотрим, куда перейдет точка O. Сначала т.O перейдет в gO (мы так задали ее переход при движении g), а потом, при отражении относительно т.A (середины между точками O и gO), вернется на место. Следовательно, по предыдущим результатам, это движение должно быть либо тождественным отображением: $S_A \circ g = \mathrm{Id}$, либо отражением относительно точки O: $S_A \circ g = S_O$.

1. $S_A \circ g = \mathrm{Id}$	Возможен ли такой вариант?
$S_A \circ S_A \circ g = S_A \circ \mathrm{Id}$	Выполним вслед за левой и правой частью S_A.
$(S_A \circ S_A) \circ g = S_A \circ \mathrm{Id}$	Скобки можно расставлять как угодно.
$\mathrm{Id} \circ g = S_A \circ \mathrm{Id}$	$S_A \circ S_A = \mathrm{Id}$. **Id** ничего не меняет.
$g = S_A$	По условию, у g нет неподвижных точек, а у S_A есть (точка A). **Противоречие!**

2. $S_A \circ g = S_O$	Возможен ли такой вариант?
$S_A \circ S_A \circ g = S_A \circ S_O$	Выполним вслед за левой и правой частью S_A.
$(S_A \circ S_A) \circ g = S_A \circ S_O$	Скобки можно расставлять как угодно.
$\mathrm{Id} \circ g = S_A \circ S_O$	$S_A \circ S_A = \mathrm{Id}$. **Id** ничего не меняет.
$g = S_A \circ S_O$	**Противоречий нет. Осталось доказать, что это движение — перенос.**

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Теорема о переносах. Часть 2 из 2

ДОКАЖЕМ, что композиция двух отражений $g=S_A \circ S_O$ является переносом на вектор $\vec{v}$.



Проследим за судьбой точек ***O*** и ***B*** (т.***B*** находится симметрично т.***A*** относительно т.***O***) при движении ***g*** и при переносе $T_{\vec{v}}$.

$g(B)=S_A \circ S_O(B)=S_A(A)=A$

$T_{\vec{v}}(B)=A$

$g(O)=S_A \circ S_O(O)=S_A(O)=gO$

$T_{\vec{v}}(O)=gO$

Осталось доказать, что если два движения одинаково действуют на двух различных точках, то они совпадают.

ЛЕММА

ПУСТЬ g_1 и g_2 — движения, и пусть существуют различные точки ***X*** и ***Y*** такие, что $g_1(X)=g_2(X)$ и $g_1(Y)=g_2(Y)$.

ТОГДА движения g_1 и g_2 совпадают, то есть на любой точке прямой будут действовать одинаково.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим вспомогательное движение $h=g_2^{-1} \circ g_1$.
Покажем, что ***h*** оставляет на месте две точки (***X*** и ***Y***):

$h(X)=g_2^{-1} \circ g_1(X)=g_2^{-1} \circ g_2(X)=X.$

$h(Y)=g_2^{-1} \circ g_1(Y)=g_2^{-1} \circ g_2(Y)=Y.$

Значит, по теореме о Двух гвоздях, $h=\mathrm{Id}$.

Получаем:

$g_2^{-1} \circ g_1=\mathrm{Id}$

$g_2 \circ g_2^{-1} \circ g_1=g_2 \circ \mathrm{Id}$ — Выполним вслед за левой и правой частью g_2.

$(g_2 \circ g_2^{-1}) \circ g_1=g_2 \circ \mathrm{Id}$ — Скобки можно расставлять как угодно.

$\mathrm{Id} \circ g_1=g_2 \circ \mathrm{Id}$ — $g_2 \circ g_2^{-1}=\mathrm{Id}$. **Id** ничего не меняет.

$g_1=g_2$ — **Доказали, что движения совпадают.**

ПРИМЕНИМ ЛЕММУ К НАШЕЙ СИТУАЦИИ:

$$g(B)=T_{\vec{v}}(B),\ g(O)=T_{\vec{v}}(O),$$

следовательно, движение $g=T_{\vec{v}}$ — перенос на вектор.

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОЙ.
Теорема классификации

СКОЛЬКО У ДВИЖЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК?

То есть сколько точек остается на месте?

- Если **больше одной** неподвижной точки, то это **тождественное отображение** *(см. Теорему о двух гвоздях)*.
- Если **ровно одна** неподвижная точка, то это **отражение** *(см. Теорему об отражениях)*.
- Если нет **ни одной** неподвижной точки, то это **перенос** на ненулевой вектор *(см. Теорему о переносах)*.

ТЕОРЕМА КЛАССИФИКАЦИИ

Любое движение прямой является:

- либо **отражением** относительно некоторой точки,
- либо **переносом** на некоторый вектор.

Id — частный случай переноса: перенос на нулевой вектор.