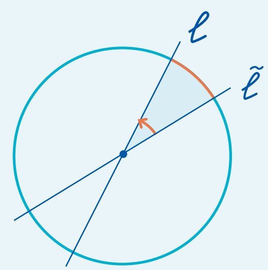
# ТАБЛИЦА КОМПОЗИЦИЙ ДВИЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

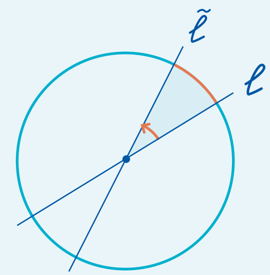
Заполним таблицу композиций движений окружности
(никаких других движений окружности, кроме отражений и поворотов, не существует, см Урок 8):

| | $S_{\tilde{\ell}}$ | $R_{\psi}$ |
|---|---|---|
| $S_{\ell}$ | $S_{\ell} \circ S_{\tilde{\ell}} = ?$ | $S_{\ell} \circ R_{\psi} = ?$ |
| $R_{\varphi}$ | $R_{\varphi} \circ S_{\tilde{\ell}} = ?$ | $R_{\varphi} \circ R_{\psi} = ?$ |

## Два отражения

Композиция отражений относительно двух прямых дает поворот на удвоенный угол между прямыми (см Урок 8).




Обозначим угол между $\tilde{\ell}$ и $\ell$ следующим образом: $<\tilde{\ell}, \ell>$ (угол измеряется против часовой стрелки). Тогда $S_{\ell} \circ S_{\tilde{\ell}} = R_{2<\tilde{\ell},\ell>}$ .

Заметим, что если поменять местами прямые, то угол между ними изменится на противоположный (так как $<\tilde{\ell},\ell> = -<\ell,\tilde{\ell}>$).

## Два поворота

Если осуществить два поворота друг за другом, то получится поворот на суммарный угол: $R_{\varphi} \circ R_{\psi} = R_{\varphi+\psi}$ (это верно и для положительных, и для отрицательных углов, а также если один положительный, а другой отрицательный).

| | $S_{\tilde{\ell}}$ | $R_{\psi}$ |
|---|---|---|
| $S_{\ell}$ | $S_{\ell} \circ S_{\tilde{\ell}} = R_{2<\tilde{\ell},\ell>}$ | $S_{\ell} \circ R_{\psi} = ?$ |
| $R_{\varphi}$ | $R_{\varphi} \circ S_{\tilde{\ell}} = ?$ | $R_{\varphi} \circ R_{\psi} = R_{\varphi+\psi}$ |

# ОТРАЖЕНИЕ ВСЛЕД ЗА ПОВОРОТОМ

Чтобы вычислить композицию $S_\ell \circ R_\psi$ алгебраически, представим поворот как композицию двух отражений (причем второе отражение должно быть относительно прямой $\ell$).

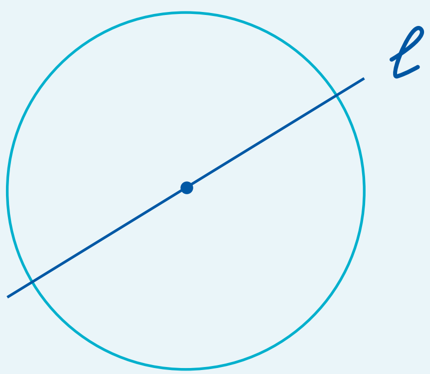
Поворот, полученный в композиции двух отражений, должен производиться на двойной угол. Значит, нам нужно сконструировать прямую $\ell$-$\psi$/2:
$R_\psi = S_\ell \circ S_{\ell - \psi/2}$

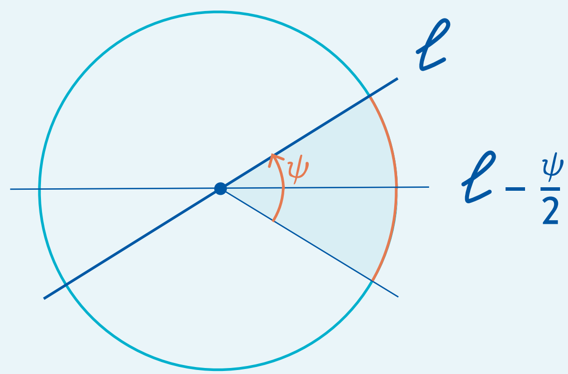
Используя это представление поворота, запишем, чему равна композиция поворота и отражения:

$$S_\ell \circ R_\psi = S_\ell \circ (S_\ell \circ S_{\ell-\psi/2}) = (S_\ell \circ S_\ell) \circ S_{\ell-\psi/2} =$$

$$= Id \circ S_{\ell-\psi/2} = S_{\ell-\psi/2}$$

Переставили скобки, получили Id, которое в композиции с $S_\ell \circ R_\psi$ дает просто $S_\ell \circ R_\psi$.
Итог: $S_\ell \circ R = S_{\ell-\psi/2}$.




# ПОВОРОТ ВСЛЕД ЗА ОТРАЖЕНИЕМ

Проведите аналогичные рассуждения для $R_\varphi \circ S_{\tilde\ell}$ и убедитесь, что
$R_\varphi \circ S_{\tilde\ell} = S_{\tilde\ell + \psi/2}$

| | $S_{\tilde\ell}$ | $R_\psi$ |
|---|---|---|
| $S_\ell$ | $S_\ell \circ S_{\tilde\ell} = R_{2<\tilde\ell,\ell>}$ | $S_\ell \circ R_\psi = S_{\ell-\psi/2}$ |
| $R_\varphi$ | $R_\varphi \circ S_{\tilde\ell} = S_{\tilde\ell+\varphi/2}$ | $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$ |