1 ПОДОБИЯ

ПОНЯТИЕ ПОДОБИЯ

Пусть есть отображение P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ или в многомерном пространстве (везде, где можно определить расстояние между парами точек).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отображение P называется **подобием** с коэффициентом $\varkappa > 0$, если $\forall\, A, B \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^2$) выполнено соотношение: $\rho(PA, PB) = \varkappa \cdot \rho(A, B)$.

Т.е. подобие увеличивает (или уменьшает) все расстояния в одно и то же количество раз.

Нам уже знакомо понятие движения, которое оставляет все расстояния неизменными. Подобия — это более широкий класс отображений, которые мы будем так же изучать: классифицировать при помощи таблицы композиций.

Позже мы докажем теорему:

ТЕОРЕМА

Подобие — взаимно однозначное отображение.

Далее мы будем пытаться классифицировать все подобия на основе композиции некоторого просто устроенного подобия с движениями. Тогда справедливость этой теоремы будет следовать из взаимной однозначности движений. Таким отображением является **гомотетия**.

ГОМОТЕТИЯ

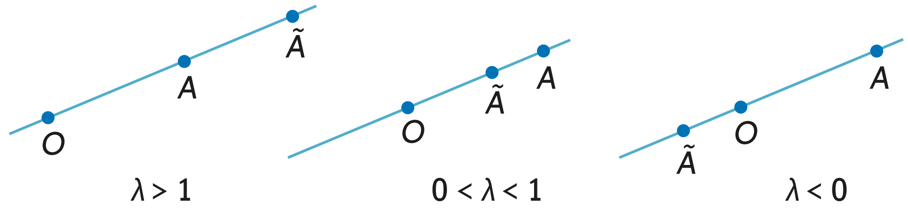
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Гомотетией H_O^λ с центром в точке O и коэффициентом $\lambda \in \mathbb{R}$ называется такое отображение, что каждой точке A прямой соответствует точка $\tilde{A}$, которая находится по ту же сторону от O на расстоянии $|\lambda|OA$ от O, если $\lambda > 0$ и по другую сторону от O на расстоянии $|\lambda|OA$ от O, если $\lambda < 0$:

$$\tilde{A} = H_O^\lambda(A) \iff \rho(O, \tilde{A}) = |\lambda|\rho(O, A).$$

Или через понятие вектора, которое мы еще строго не определили, но интуитивно давно используем:

$$\overrightarrow{O\tilde{A}} = \lambda\overrightarrow{OA}$$



При гомотетии точка O остается на месте, а все остальные точки:

- в одно и то же количество раз удаляются от нее, если $\lambda > 1$;
- равномерно к ней приближаются, если $0 < \lambda < 1$;
- приближаются или удаляются, но с поворотом на 180° относительно точки O, если $\lambda < 0$.

СВОЙСТВА ГОМОТЕТИИ

С1. При $\lambda \neq 0$ H_O^{λ} — взаимно однозначное отображение.

С2. При $\lambda = 0$ H_O^{0} схлопывает прямую (или плоскость) в одну точку O.

С3. При $\lambda = -1$ H_O^{-1} на плоскости есть поворот на 180° относительно точки O, а на прямой — отражение относительно точки O.

Таким образом, известные нам отображения Id, S_O входят в семейство гомотетий $\{H_O^{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

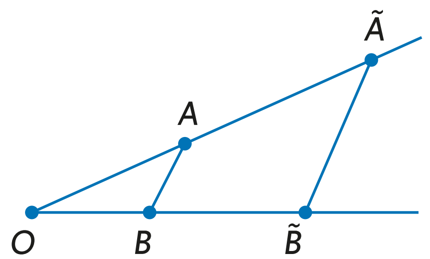
СВЯЗЬ ГОМОТЕТИИ И ПОДОБИЯ

УТВЕРЖДЕНИЕ

$\forall \lambda \neq 0$ гомотетия H_O^{λ} есть подобие с коэффициентом $|\lambda|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если взять любые две точки A и B, то во сколько раз при гомотетии увеличится отрезок OA, во столько же раз увеличится отрезок OB. По признаку подобия треугольников во столько же раз увеличится отрезок AB.



И, наконец, ключевое утверждение развиваемой теории:

УТВЕРЖДЕНИЕ

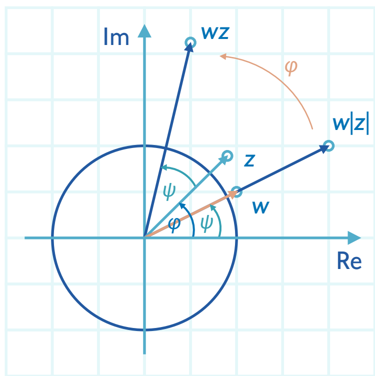
Пусть P — подобие на $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{R}^2$ с коэффициентом $\varkappa > 0$. Тогда композиция $H_O^{1/\varkappa} \circ P$ является движением.

Очевидно, т.к. любое расстояние сначала увеличивается в $\varkappa$ раз, а затем в $\varkappa$ раз сжимается.

Таким образом, любое подобие есть взаимно однозначное отображение.

ПОВОРОТНАЯ ГОМОТЕТИЯ

Это следующее отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (на комплексной плоскости, что эквивалентно $\mathbb{R}^2$). Фиксируем $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\forall\, w \in \mathbb{C}$ $\varphi_z(w) = z \cdot w$ — домножение на данное комплексное число z. С поворотной гомотетией мы познакомились, когда изучали комплексные числа. Каждый вектор, исходящий из начала координат, поворачивается на угол, равный $arg\, z$, и удлиняется в $|z|$ раз.



Итак, поворотная гомотетия есть композиция двух коммутирующих преобразований плоскости:

$\varphi_z = H_O^{|z|} \circ R_O^{arg\, z} = R_O^{arg\, z} \circ H_O^{|z|}$.

Это пример подобия плоскости, сохраняющего ее ориентацию.