ТРИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Вектор — это параллельный перенос.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Вектор — это направленный отрезок (от начала к концу).

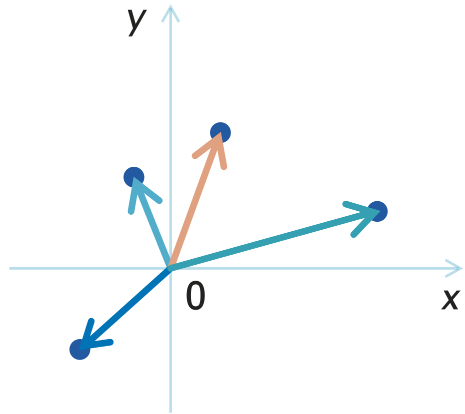
Уточнение: два вектора равны ⇔ они имеют одинаковое направление и одинаковую длину.

Понятно, что если два вектора отложены от разных точек, но имеют одинаковое направление и одинаковую длину, то они задают один и тот же параллельный перенос плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

Вектор — это отрезок с началом в точке (0; 0) на координатной плоскости. Его направление — это направление от начала к концу.

Все параллельные переносы можно задать различными векторами, исходящими из начала координат.



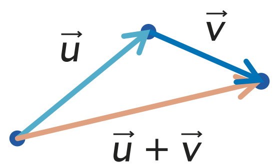
Векторы можно складывать.

Сумма векторов есть композиция соответствующих параллельных переносов:

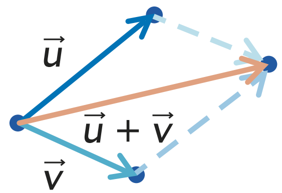
$$T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$$

Таким образом, векторы образуют группу по сложению:

- есть нейтральный элемент — нулевой вектор;
- есть обратный элемент — вектор той же длины, но противоположного направления;
- ассоциативность сложения следует из ассоциативности композиции параллельных переносов.



Сложение векторов по правилу треугольника



Сложение векторов по правилу параллелограмма

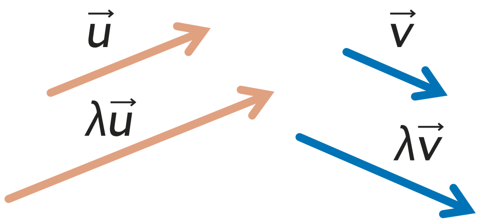
ВОПРОС

Как на векторы действуют преобразования плоскости, которые мы изучали?

Все эти преобразования будут действовать на векторы **линейно**. Что означает линейность, мы сейчас увидим. Наука о объектах, которые подчиняются условиям линейности, называется линейная алгебра. Мы будем ею заниматься некоторое время и с ее помощью будем изучать в дальнейшем алгебраические числа.

ЛИНЕЙНОСТЬ

Введем еще одну операцию над векторами — **умножение на число**. Результатом этой операции будет вектор, удлиненный в данное количество раз: $\vec{v} \cdot \lambda = \lambda\vec{v}$



При умножении на отрицательное число направление вектора меняется на противоположное.
Умножение вектора на число удовлетворяет следующим свойствам:

$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
$\lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$
$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Эта система правил умножения объекта типа «вектор» на объект типа «число» вместе со свойствами сложения векторов задают **векторное пространство**.

На месте векторов здесь могут быть и другие объекты (например, функции).

Есть еще третий тип объектов — точки: A, B, C,…
Можно выполнять следующие операции:

1) точка + вектор = точка;
2) точка – точка = вектор.

Например, $B - A + D$ — это точка, которая получается, если из точки D отложить вектор $\overline{AB}$.

Это **аффинная** арифметика.

ТЕОРЕМА

Для любого подобия (в частности, для любого движения) P: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ корректно определено отображение на векторах на соответствующем векторном пространстве $\widetilde{P} : V \to V$.

Это означает, что если есть два равных вектора в разных частях плоскости, то данное подобие изменит их одинаковым образом.

При этом $\widetilde{P}$ линейно для каждого подобия, то есть:

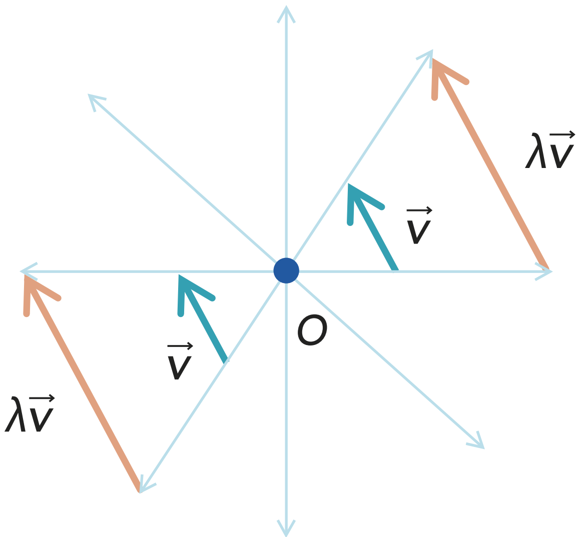
$\widetilde{P}(\lambda\vec{v}) = \lambda\widetilde{P}(\vec{v})$;
$\widetilde{P}(\vec{v} + \vec{w}) = \widetilde{P}(\vec{v}) + \widetilde{P}(\vec{w})$.

Таким образом, мы каждому подобию ставим в соответствие некоторое **линейное отображение** векторного пространства (всех векторов на плоскости или на прямой).

Для доказательства даже не требуется классификация подобий плоскости. Достаточно убедиться, что если гомотетия или движение действует линейно, то и композиция гомотетий тоже будет действовать линейно на вектор.

ДЕЙСТВИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ВЕКТОРЫ

1) Гомотетия



$H_O^\lambda(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

Оказывается, гомотетия действует на все равные векторы одинаково, как умножение на число λ.

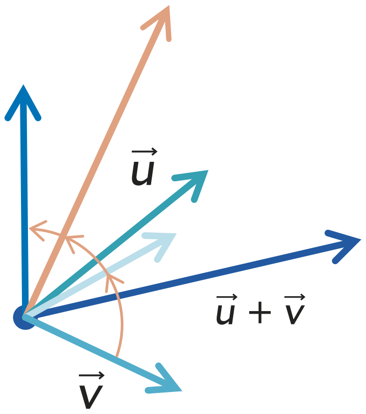
Проверим, что выполнены свойства линейности:

$H_O^\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} = H_O^\lambda(\vec{v}) + H_O^\lambda(\vec{w})$

$H_O^\lambda(\mu\vec{v}) = \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v} = H_O^{\lambda\mu}(\vec{v})$

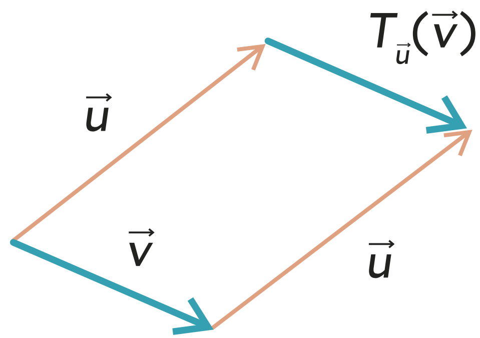
2) Поворот

Отложим вектор из начала координат. Тогда в результате поворота вектор повернется в точности на угол поворота. При этом все свойства линейности выполнены.

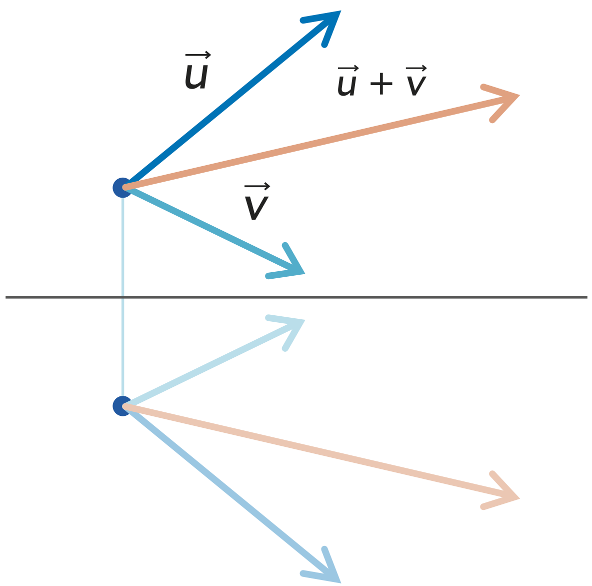


3) Параллельный перенос

Параллельный перенос не меняет векторов: действие любого переноса на вектор есть тождественное преобразование (оно очевидно линейно).



4) Отражение



Если использовать в качестве модели картинку, где все векторы отложены от начала координат, и провести через начало координат прямую, параллельную той, относительно которой совершается отражение, то в результате отражения относительно этой прямой получим тот же результат.

5) Скользящая симметрия

Скользящая симметрия есть композиция отражения и параллельного переноса, а т.к. сдвиг ничего не меняет, действие такое же, как при отражении.

Мы получили, что точка, откуда мы откладываем все векторы, является неподвижной для всех типов движений. Получаем 2 типа движений: поворот и отражение, которые мы знаем как группу движений окружности.

Каждому движению плоскости сопоставим его действие на векторах. Получаем множество движений окружности.

Таким образом, фактор-группа* группы движений плоскости по группе параллельных переносов изоморфна группе движений окружности.

$D(R^2)/T \cong D(S^1)$

*ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если H — нормальная подгруппа группы G, то для каждого $h \in H$ можно рассмотреть смежные классы $\{ah \mid a \in G\}$. Их множество является группой, которая называется **фактор-группой** G по H и обозначается G/H.

ВОПРОС

Почему мы не изучаем подобия окружности?

ОТВЕТ

Ответ: на окружности невозможно увеличить расстояние между точками в одно и то же количество раз, т.к. невозможно получить расстояние, большее чем расстояние между диаметрально противоположными точками.

На этом приглашение в линейную алгебру завершается, и начинается работа с линейными пространствами, к которой мы перейдем, начиная со следующего урока.