1 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Экспериментальная математика – считаем и наблюдаем: пытаемся что-то вычислить «руками» и обнаружить какие-то закономерности в результатах.

> **Математика — это часть физики, а именно, та часть физики, где эксперименты очень дешевые.**
>
> *В.И. Арнольд**

$x + x = 0$ ПО МОДУЛЮ 8

Решим уравнение $x \oplus x = 0$ на множестве остатков по модулю 8.

РЕШЕНИЕ

Множество остатков по модулю 8:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Сложение в арифметике остатков -

остаток от деления суммы на 8.

8 ⊕	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

В таблице сложения остатков по модулю 8 на диагонали стоят результаты сложения $0 \oplus 0$, $1 \oplus 1$, $2 \oplus 2$ и т.д.

Остаток 0 стоит в позициях $0 \oplus 0$ и $4 \oplus 4$.

В таблице сложения остатков по модулю 8 на диагонали стоят результаты сложения $0 + 0$, $1 + 1$, $2 + 2$ и т.д.

ОТВЕТ

В арифметике остатков по модулю 8 уравнение $x \oplus x = 0$ (или $2x = 0$) имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

* Арнольд Владимир Игоревич (1937-2010), советский и русский математик,один из крупнейших математиков XX века.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2 $x + x = 0$ ПО МОДУЛЮ m

Решим уравнение $x \oplus x = 0$
на множестве остатков по модулю 9.

РЕШЕНИЕ

Множество остатков по модулю 9: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Сложение в арифметике остатков —
остаток от деления суммы на 9.

9 $\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Остаток 0 стоит только в позиции $0 \oplus 0$.

ОТВЕТ

В арифметике остатков по модулю 9 уравнение $x \oplus x = 0$
(или $2x = 0$) имеет один корень $x = 0$.

Вопрос: в чем принципиальная разница между числом 8
и числом 9?

Если модуль m — **четное** число, то $\dfrac{m}{2}$ — целое.

Для остатка, равного $\dfrac{m}{2}$, имеем $\dfrac{m}{2} \oplus \dfrac{m}{2} = 0$

$\Rightarrow$ Уравнение $x \oplus x = 0$ имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{m}{2}$

Если модуль m — **нечетное** число, то остатка, равного $\dfrac{m}{2}$, нет

$\Rightarrow$ Уравнение $x \oplus x = 0$ имеет один корень $x = 0$

$2x \vdots m \Rightarrow x \vdots m$ для всех нечетных m

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 $3x = 0$ ПО МОДУЛЮ m

Решим уравнение $x \oplus x \oplus x = 0$
на множестве остатков по модулю m.

РЕШЕНИЕ

Если $m \vdots 3$, то для остатков, равных $\frac{m}{3}$ и $\frac{2m}{3}$ выполнено:

$$\frac{m}{3} \oplus \frac{m}{3} \oplus \frac{m}{3} = 0$$

$$\frac{2m}{3} \oplus \frac{2m}{3} \oplus \frac{2m}{3} = 0$$

$\Rightarrow$ Уравнение имеет три корня

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{m}{3},\ x_3 = \frac{2m}{3}$$

Если модуль $m \not\vdots 3$, то уравнение имеет один корень $x = 0$

$$m \not\vdots 3,\ 3x \vdots m \Rightarrow x \vdots m$$

$kx = 0$ ПО МОДУЛЮ m

Решим уравнение

$$\underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{k \text{ раз}} = 0$$

на множестве остатков по модулю m.
k – любое натуральное число.

РЕШЕНИЕ

Если $m \vdots k$, то числа $\frac{m}{k}, \frac{2m}{k}, \ldots \frac{(k-1)m}{k}$ —

целые остатки по модулю m и являются корнями уравнения.

$\Rightarrow$ уравнение имеет k корней:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{m}{k},\ x_3 = \frac{2m}{k}, \ldots\ x_k = \frac{(k-1)m}{k}$$

Если $m \not\vdots k$, то уравнение имеет один корень $x = 0$

$$m \not\vdots k,\ k \vdots x\ \ m \Rightarrow x \vdots m$$

Если наибольший общий делитель чисел m и k (НОД (m, k)) больше 1, то корней уравнения будет несколько.

ЗАМЕЧАНИЕ

Это утверждение для любого целого m и натурального k мы привели без доказательства.

Это утверждение эквивалентно **основной теореме арифметики,** важнейшему факту всей начальной математики.

Ближайшие занятия мы посвятим доказательству основной теоремы арифметики.

Цель сегодняшнего урока —провести подготовительную работу: методом экспериментальной математики изучить **таблицы умножения остатков по произвольному модулю.**

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

4 ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ ПО МОДУЛЯМ 2 И 3

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ ОСТАТКОВ ПО МОДУЛЮ $m=2$

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

0 – чет
1 – нечет

Для сравнения:
таблица сложения

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ ОСТАТКОВ ПО МОДУЛЮ $m = 3$

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Замечаем сходство для $m = 2$ и $m = 3$:

- Нулевая строка и нулевой столбец состоят из нулей;
- Ненулевая часть таблицы симметрична относительно диагонали.

Данные пункты будут общими для таблиц умножения остатков по любому модулю m, т.к.

1. Остаток 0 по модулю m дает любое кратное m число. Произведение его с любым числом будет кратно m.
2. $a \cdot b = b \cdot a$ для любых a и b.

ПРИМЕР ИЗОМОРФИЗМА ГРУПП

Позже мы узнаем, что множество остатков относительно операций сложения и умножения по модулю представляет собой математический объект – **группу**.

Если заменить 1 на 0, а 2 на 1 в ненулевой части таблицы умножения по модулю 3, то получим в точности таблицу сложения по модулю 2:

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Это взаимно-однозначное соответствие называется **изоморфизмом.**

5 ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ ПО МОДУЛЯМ 4 И 5

ТАБЛИЦА ПО МОДУЛЮ $m = 4$

⊙	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

ТАБЛИЦА ПО МОДУЛЮ $m = 5$

⊙	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ЗАМЕЧАЕМ СХОДСТВО:

Таблицы умножения остатков центрально симметричны в их ненулевой части.

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

ЗАМЕЧАЕМ РАЗЛИЧИЕ:

При $m = 4$ в ненулевой части таблицы встречается 0, а при $m = 5$ нулей нет.

ИТОГИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО m

СХОДСТВО

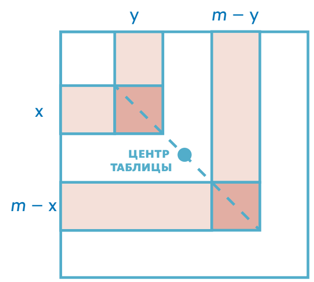
Нулевая строка и нулевой столбец состоят из нулей;

Первая строка и первый столбец – это 0, 1, 2, …, $m - 1$;

Таблица симметрична относительно диагонали;

Ненулевая часть таблицы центрально симметрична.

Докажем последнее утверждение.
$(m - x)(m - y) = m \cdot m - m \cdot x - m \cdot y + x \cdot y$
Остаток от деления на m выражения в правой части совпадает с остатком от деления $x \cdot y$ на m, т.к. остальные слагаемые делятся на m.



Центральная симметрия означает равенство остатков, стоящих в выделенных ячейках, для любых x, y.

РАЗЛИЧИЕ

Некоторые таблицы содержат нули в ненулевой части, а другие – нет.

Изучение этого различия приведет нас к важнейшему результату начальной математики –
основной теореме арифметики.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов