1 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мы начинаем подводить итоги арифметических исследований, которым были посвящены первые уроки нашего курса.
На протяжении нескольких уроков мы занимаемся следующей задачей:

ЗАДАЧА

Сосчитать количество рациональных (или целых) точек на прямой, заданной уравнением

$$ax + by + c = 0$$

СЛУЧАЙ 1

a, b и c — целые. Полностью изучили на уроках №№ 16 - 18.

СЛУЧАЙ 2

a, b и c — рациональные. То есть, для некоторых целых a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 $(a_2, b_2, c_2 \neq 0)$

$$\frac{a_1}{a_2}x + \frac{b_1}{b_2}y + \frac{c_1}{c_2} = 0$$

Домножим уравнение на $a_1 \cdot b_2 \cdot c_2$. Получим

$$a_1 b_2 c_2 x + b_1 a_2 c_2 y + c_1 a_2 b_2 y = 0$$

В этом уравнении, равносильном нашему, все коэффициенты — целые. Таким образом, мы свели случай 2 к случаю 1.

СЛУЧАЙ 2

a, b и c — не рациональные. Этот случай распадается на два: когда коэффициенты a и b соизмеримы и когда они не соизмеримы. С понятием соизмеримости мы познакомились на уроке № 2. Теперь мы снова возвращаемся к нему в приложении к рассматриваемой задаче.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СОИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отрезки a и b называются соизмеримыми, если существует такой отрезок d, который укладывается в a и в b целое количество раз. То есть $a = md$, $b = nd$ для некоторого отрезка d и целых чисел m и n.

Пусть a и b соизмеримы. Тогда существуют такие целые числа m и n и такой отрезок d, что $a = md$, $b = nd$.
Подставим в уравнение:

$$(md)x + (nd)y + c = 0.$$

Разделив на d, получим:

$$mx + ny + (c/d) = 0.$$

Т.к. числа m и n — целые, то все зависит от числа c/d.
Если c/d не целое, то решений нет.
Если c/d — целое, то мы получаем случай 1.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

На уроке № 2 мы доказали **критерий соизмеримости**. Сформулируем его снова.

Отрезки a и b соизмеримы $\Leftrightarrow a/b \in \mathbb{Q}$*.

$\Rightarrow$) очевидно если $a = md$, $b = nd$, то $a/b = md/nd = m/n \in \mathbb{Q}$.
$\Leftarrow$) любое рациональное число представимо в виде дроби, значит, $a/b = m/n$. Взяв отрезок $d = a/m = b/n$, получим, что $a = md$, $b = nd$, т.е. a и b — соизмеримы.

Несоизмеримость означает, что $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Заметим, что если $a = 0$ или $b = 0$, то a и b — соизмеримы. Например, если $a = 0$, то можно взять $d = b$, $m = 0$, $n = 1$.

ТЕОРЕМА

Пусть a и b — не соизмеримы. Тогда на прямой

$$ax + by + c = 0$$

может быть не более одной рациональной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

От противного.
Предположим, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки с рациональными координатами, лежащие на нашей прямой. Тогда:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Вычтем одно из другого:

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c = 0$$

Если либо $x_1 - x_2 = 0$, либо $y_1 - y_2 = 0$, то получаем прямую с уравнением $a = 0$ либо $b = 0$, но в таком случае a и b будут соизмеримы.

Следовательно, $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ — отличные от нуля рациональные числа, т.к. являются разностью рациональных чисел. Тогда, разделив уравнение на $b(x_1 - x_2)$, получим:

$$a/b = -(y_1 - y_2) \,/\, (x_1 - x_2)$$

$\Rightarrow$ $a/b \in \mathbb{Q}$ как отношение рациональных чисел.
Но по критерию соизмеримости тогда a и b — соизмеримы.
Приходим к противоречию.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА

СЛЕДСТВИЕ

Если прямая проходит через начало координат, т.е. задается однородным уравнением:

$$ax + by = 0,$$

где a и b — не соизмеримы, то на ней нет никаких рациональных точек, кроме точки $(0, 0)$.

* $\in \mathbb{Q}$ — принадлежит множеству рациональных чисел.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

ПРИМЕР 1

$$x + (\sqrt{2})y + c = 0$$

При каком c эта прямая пройдет через рациональную точку? Найдем такое c, чтобы прямая прошла через точку $(1, 1)$:

$$1 + (\sqrt{2})\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1 - \sqrt{2}$$

ВОПРОС

Всегда ли есть на прямой рациональная точка и как ее найти?

Ответ на этот вопрос не так прост. Он лежит в области теории полей и пока мы его оставляем «на вырост».

ПРИМЕР 2

$$(\sqrt{3})x + (\sqrt{12})y = 3\sqrt{3}$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$(\sqrt{3})x + (2\sqrt{3})y = 3\sqrt{3}$$

Разделив на $\sqrt{3}$, получим:

$x + 2y = 3$ — уравнение с целыми коэффициентами, которое равносильно нашему и которое умеем решать.

Угадываем частное решение: $(1, 1) \Rightarrow$ общее решение:

$x = 1 + 2t,\ y = 1 - t$, где t — любое целое.

ПРИМЕР 3

$$(\sqrt{3})x + (\sqrt{12})y = \sqrt{6}$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$(\sqrt{3})x + (2\sqrt{3})y = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

Разделив на $\sqrt{3}$, получим:

$$x + 2y = \sqrt{2}$$

Это уравнение ни целых, ни рациональных решений иметь не может.

ПРИМЕР С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ *a* и *b*

ПРИМЕР 4

$$x + (\sqrt{2})y = c$$

Такое уравнение в зависимости от с может иметь одну рациональную точку или не иметь вовсе.

Важно, что все элементы множества

$$\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}^*$$

различны. Иначе уравнение $x + (\sqrt{2})y = c$ имело бы рациональное решение помимо $(0, 0)$.

Этот факт выводит нас на теорию приближений иррациональных чисел рациональными, являясь мостом ко «взрослой» математике.

* $\in \mathbb{Z}$ — принадлежит множеству целых чисел.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

4 ПРИБЛИЖЕНИЕ $\sqrt{2}$ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Рассмотрим подмножество множества

$$\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}^*$$

такое, что $-500 < m, n < 500$.
Оно имеет около миллиона различных элементов
(все комбинации 999 значений m и 999 значений n).

При этом они все лежат в интервале

$$(-500\,(1 + \sqrt{2}),\ 500\,(1 + \sqrt{2}))$$

который заведомо содержится в интервале (–1500, 1500).
Таким образом, миллион точек лежат в интервале длины 3000.
Тогда какие-то две из них обязательно лежат на расстоянии, не превосходящем 1/300 (иначе по принципу Дирихле все точки не поместятся в интервал).

Это означает, что для $m = m_1 - m_2$, $n = n_1 - n_2$

$$|m + n\sqrt{2}\,| < 1/300$$

Перепишем это неравенство:

$$\left|\sqrt{2} - \left(-\frac{m}{n}\right)\right| < \frac{1}{300|n|}$$

Отсюда следует, что мы, изменяя m и n в пределах $(-500, 500)$, с помощью дроби — m/n приблизились к $\sqrt{2}$, как минимум, на 1/300.

Расширяя диапазон $(-N, N)$ изменения m и n, можно строго установить, что найдется дробь, отстоящая от $\sqrt{2}$ на расстояние, меньшее $1/N$.

ВОПРОС

Как найти такую дробь?

ОТВЕТ

методом цепных дробей, используя (пока без доказательства) тот факт, что $\sqrt{2}$ представим в виде бесконечной цепной дроби:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Возьмем несколько «этажей» и свернем в обыкновенную дробь m/n. Это будет приближение для $\sqrt{2}$.
Отсекая «хвост» этой бесконечной цепной дроби на все более позднем этапе, мы будем получать рациональные числа, являющиеся все более точными оценками для $\sqrt{2}$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов