1 БЕСКОНЕЧНОСТЬ РЯДА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Продолжаем подводить итоги арифметическим исследованиям. Сегодня поговорим о фактах и загадках простых чисел.

ТЕОРЕМА ЕВКЛИДА

Простых чисел бесконечно много.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Докажем методом от противного.
Пусть существует n простых чисел: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... , p_n.
Перемножим их и рассмотрим число, равное

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Это число не является простым, так как оно больше всех n существующих простых чисел. Тогда по основной теореме арифметики существует его разложение на простые множители: $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$. Все эти множители содержатся в списке простых $\Rightarrow$ на каждый из них делится произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Но тогда N не может делиться ни на один из них, т.к. 1 не делится ни на один из них. Противоречие.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

ЗАМЕЧАНИЕ

Перемножение нескольких простых чисел и добавление к ним 1 не является рецептом построения нового простого числа. Ведь при доказательстве теоремы использовался факт, что мы перемножили ВСЕ простые числа.

Например, число

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, но делится на 59.

НЕДОКАЗАННЫЕ ГИПОТЕЗЫ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

1. ГИПОТЕЗА ЕВКЛИДА О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ-БЛИЗНЕЦАХ

Близнецами называют пары простых чисел, разделенные в числовом ряду только одним числом. Например:

3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43,…

Гипотезу Евклида о том, что простых чисел-близнецов бесконечно много, до сих пор никто не смог ни доказать, ни опровергнуть.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2. ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Любое четное число можно представить в виде суммы двух простых чисел. Например:

$12 = 5 + 7$
$22 = 11 + 11$

Проблема Гольдбаха не доказана до сих пор.

Зато удалось доказать утверждение о том, что любое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел
(1971 — И.М. Виноградов, для достаточно больших чисел; 2013 — доказано полностью).

3. ГИПОТЕЗА О БЕСКОНЕЧНОСТИ РЯДА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ВИДА $n^2 + 1$

При некоторых n число вида $n^2 + 1$ является простым. Например:

n	1	2	4	6	10
$n^2 + 1$	2	5	17	37	101

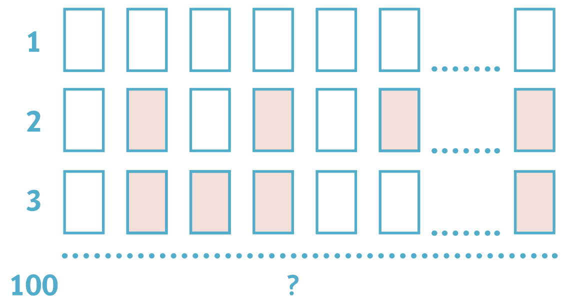
Бесконечен ли ряд простых чисел вида $n^2 + 1$, до сих пор неизвестно.

ДВЕ ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕЛИМОСТИ

Сформулируем две задачи, одну из которых решим чуть позже, а другую оставим для самостоятельного решения.

ЗАДАЧА О ШКАФЧИКАХ

В детском саду 100 шкафчиков, пронумерованных от 1 до 100. По свистку воспитателя открываются все шкафчики. Затем воспитатель свистит 2-й раз, и дети с четными номерами шкафчиков закрывают их. И так далее до 100. После n-го свистка обладатели шкафчиков, номера которых делятся на n, меняют положение дверцы.
Какие шкафчики будут открыты после того, как процедура будет произведена в заключительный, 100-й раз?



ЗАДАЧА «БАЗАР ЧИСЕЛ» (АВТОР И.В. ЯЩЕНКО)

Необходимо купить набор чисел от 2 до 30.
При этом, заплатив 1 рубль за число n, можно бесплатно получить все делители числа n и все кратные этих делителей, и все делители кратных этих делителей, и т.д.
Сколько придется заплатить за весь набор?

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Введем две функции: количество делителей и сумма делителей числа. С помощью основной теоремы арифметики получим для них формулы.

В соответствии с основной теоремой арифметики запишем для числа N **каноническое** разложение на простые множители:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

где все p_i различны.

Тогда любой делитель m числа N имеет следующий канонический вид:

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$$

где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ для любого i от 1 до r.

Количество делителей числа (обозначим его $\delta(N)$) будет равно количеству всех возможных комбинаций для выбора β_i, а именно:

$$\delta(N) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_r)$$

ПРИМЕР

$$N = 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Количество делителей :

$$\delta(N) = (1 + 2)(1 + 2) = 9$$

	0	1	2
0	1	5	25
1	2	10	50
2	4	20	100

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРО ШКАФЧИКИ

Рассмотрим шкафчик номер n.
Положение его дверки меняется на m-ый свисток, если .
$\Rightarrow$ открытыми будут те шкафчики, число делителей которых нечетно.
Все шкафчики с простыми номерами $n = p$ будут закрыты, т.к. у простого числа два делителя: 1 и p.

$\delta(N)$ нечетно $\Rightarrow (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_r)$ — нечетные числа $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — четные числа.

Тогда

$$k = p_1^{\alpha_1/2} \cdot p_2^{\alpha_2/2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r/2}$$

целое число, и $n = k^2$.

ОТВЕТ

Открытыми будут все шкафчики, номера которых являются квадратами целых чисел: 1, 4, 9, 16,…, 100.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

4 СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Число N называется совершенным, если сумма всех его делителей (кроме его самого), равна ему самому.

Например:

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

С помощью нашей техники мы сможем найти еще несколько примеров совершенных чисел.

Пусть N представлено в каноническом виде:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

Попробуем посчитать сумму всех его делителей.

ПРИМЕР

$$N = 100 = 2^2 \cdot 5^2$$
$$\delta\,(N) = (1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 5 + 5^2) =$$
$$1 + 2 + 2^2 + 5 + 2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 5^2 + 2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 5^2 =$$
$$7 \cdot 31 = 217$$

Для произвольного N можно записать аналогично:

$$\delta\,(N) = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})\,(1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots$$
$$\cdot (1 + p_r + \ldots + p_r^{\alpha_r})$$

Попробуем догадаться, какой вид могут иметь совершенные числа. Распишем:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2^2 - 1)$$
$$28 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$$

Замечаем некоторую закономерность.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Если $2^k - 1$ — простое число, то число вида $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ — совершенное.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Заметим, что если $p = 2^k - 1$ — простое, то $n = 2^{k-1} \cdot p$ — канонический вид числа n.
Тогда сумма его делителей:

$$\delta(n) = (1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}) \cdot (p + 1) = 2^k \cdot (2^k - 1) = 2n$$

А это и означает, что число n равно сумме своих делителей.

Заметим, что выражение $2^k - 1$ не может быть простым при составных k, но также не при всех простых k оно простое.

При $k = 5$ $2^k - 1 = 31$ — простое число, и наша формула дает еще одно совершенное число — 496.

Человечеству известно около 50 совершенных чисел (часть из них получено с помощью компьютера).

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

Есть рассуждение, показывающее, что все существующие четные совершенные числа имеют вид $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$.

Мы не знаем, бесконечен ли ряд совершенных чисел, потому что бесконечность ряда простых чисел вида $2^k - 1$ (чисел Мерсенна) тоже не доказана.

До сих пор никому не удалось построить нечетное совершенное число. Равно как не удалось доказать, что их не существует.

Завершая разговор о загадках простых чисел, упомянем о простых числах вида $2^k + 1$, которые называются числами Ферма, и которых человечеству известно всего 5, так как не все числа такого вида — простые.

Если число Ферма $p = 2^k + 1$ — простое, то k тоже является степенью двойки:

$$p = 2^{2^l} + 1$$

Известные простые числа Ферма:

$$3, 5, 17, 257, 65537.$$

Все они, в частности, связаны с правильными многоугольниками, которые можно построить циркулем и линейкой.

Факты и загадки, связанные с простыми числами, отворяют двери во многие разделы современной математики.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов