1 КОМПОЗИЦИЯ ПЕРЕСТАНОВОК

Перестановку можно рассматривать как приказ, на какую вешалку перевесить пальто с данным номером.

Композиция перестановок — результат действий двух или нескольких шутников, которые друг за другом перевесили все пальто, каждый по-своему.

ПРИМЕР: n = 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Так же как в случае с движениями прямой и окружности, композиция $\sigma \circ \tau$ означает, что сначала применяется перестановка τ, а затем перестановка σ.

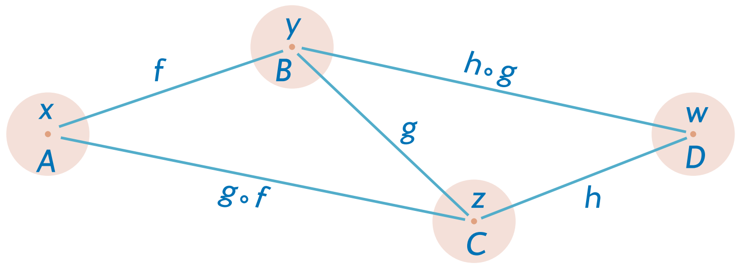
Изучим свойства композиций перестановок и составим таблицу композиций для перестановок на множестве из трех элементов.

АССОЦИАТИВНОСТЬ КОМПОЗИЦИИ ПЕРЕСТАНОВОК

Пусть есть четыре множества A, B, C и D и три отображения f, g и h, действующие, соответственно, из A в B, из B в C и из C в D.
Тогда результаты композиций $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ совпадают:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Это свойство называется **ассоциативностью** (сочетательным законом).



f : x → y
g : y → z
h : z → w

Одинаковый результат

Сначала	Сначала
$g \circ f$: x → z	f : x → y
Затем	Затем
h : z → w	$g \circ h$: y → w

2 ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ ЛИ ПЕРЕСТАНОВКИ?

ПРИМЕР 1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&2&3&1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&2&3&1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&4&3&1 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&2&3&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&3&2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$$

Таким образом, закон **коммутативности** (перестановочности) для перестановок в общем случае не выполнен, **перестановки не перестановочны**.

ПРИМЕР 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&2&3 \end{pmatrix}$$

Мы получили одинаковый результат, значит, данные перестановки σ и τ — **перестановочны**.

Это объясняется тем, что в данном примере

$$\tau = \sigma \circ \sigma$$

Действительно

$$\sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&3&4&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix} = \tau$$

Так как выполнено свойство ассоциативности,

$$\sigma \circ \tau = \sigma \circ (\sigma \circ \sigma) = (\sigma \circ \sigma) \circ \sigma = \tau \circ \sigma$$

Найдем композицию $\tau \circ \tau$:

$$\tau \circ \tau = (\sigma^2) \circ (\sigma^2) = \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&3&4 \end{pmatrix} = Id$$

$\Rightarrow \sigma^4 = Id$ — тождественное преобразование (перестановка, которая все оставляет на месте).

Позже мы докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ

Для любой перестановки

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1, & i_2, & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, где $i_1, i_2, \ldots i_n$ — числа $1, 2, \ldots, n$, взятые в произвольном порядке,

существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\sigma^m = Id$.

Это значение m может быть существенно больше, чем n.

Когда $m = n$? Например, когда $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

Перестановка σ из примера 2 соответствует $m = n = 4$.

Еще одно утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ

Для каждой перестановки σ существует обратная ей перестановка σ^{-1} такая, что $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$

3 ТАБЛИЦЫ КОМПОЗИЦИЙ ПЕРЕСТАНОВОК

Пусть $n = 3$. Составим таблицу композиций перестановок на 3-х символах.

На протяжении всего курса «100 уроков математики» независимо от того, что мы рассматриваем: движения, арифметику остатков по модулю, перестановки или другие объекты, всегда возникают одни и те же математические смыслы.

Мы помним, что при $n = 3$ существует $3! = 6$ различных перестановок. Таким образом мы получим таблицу 6х6.

Мы убедимся, что множество перестановок с заданной на нем операцией композиции образует группу.

	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

СВОЙСТВА ТАБЛИЦЫ КОМПОЗИЦИЙ ПЕРЕСТАНОВОК:

- для каждой перестановки существует обратная ей (нейтрализующая) перестановка, композиция с которой дает тождественную перестановку;
- в каждой строке и в каждом столбце ровно один раз встречается тождественная перестановка;
- в каждой строке и в каждом столбце встречаются все перестановки ровно по одному разу, повторений нет.