1 КЛАССЫ СОПРЯЖЕННОСТИ В S_4

Все исследования классов сопряженности, гомоморфизмов и их ядер, что мы проделали на прошлом уроке для S_3, теперь проведем для S_4, познакомимся с группой Клейна и выясним, в чем ее уникальность.

В группе S_4 имеется 24 элемента, которые разбиваются на 5 классов сопряженности:

Структура циклов	-	(. .)	(. . .)	(. . . .)	(. .)(. .)
перестановки в классе сопряженности	Id	(1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4)	(1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3)	(1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 2 3), (1 4 3 2)	(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)
количество	1	6	8	6	3

Как и в случае с S_3, любой гомоморфизм $F: S_4 \to S_{24}$ распадется на независимые гомоморфизмы в каждом классе сопряженности, образ каждого из которых будет группой гораздо более низкого порядка, чем S_{24}.

Выпишем эти гомоморфизмы.

$F_1: S_4 \to S_1 = \{Id\}$

$F_2: S_4 \to S_6,$

$F_3: S_4 \to S_8,$

$F_4: S_4 \to S_6,$

$F_5: S_4 \to S_3.$

Интерес для нас представляет $F_5: S_4 \to S_3$. Оказывается, во всех S_n при $n \geqslant 5$ больше такого гомоморфизма с понижением порядка нет.

УТВЕРЖДЕНИЕ

В S_n при $n \geqslant 5$ есть только три нормальные подгруппы: $\{Id\}$, сама S_n и A_n — подгруппа четных перестановок. Соответственно, существует три гомоморфизма:

- тривиальный,
- изоморфизм S_n на S_n
- гомоморфизм «знак», который переводит все четные перестановки в Id.

Доказательство этого утверждения довольно сложное, и мы его здесь не приводим.

Изучим подробно гомоморфизм $F_5: S_4 \to S_3$.

2 ГОМОМОРФИЗМ $\mathcal{F}_5: S_4 \to S_3$

Итак, при действии сопряжением любой из 24-х перестановкой $\sigma \in S_4$ на класс сопряженности $\{(12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$, мы будем получать перестановку этих трех элементов, т.е. один из 6-ти элементов группы S_3. Это значит, что по принципу Дирихле все 24 перестановки группы S_4 разбиваются на 6 блоков, и каждый блок при сопряжении дает какую-то одну перестановку из S_3.

Оказывается, каждый из этих блоков состоит ровно из 4-х элементов группы S_4. Но нас интересует ядро гомоморфизма F_5, то есть те 4 перестановки $\sigma \in S_4$, сопряжение посредством которых
дает Id на $\{(12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$, то есть:

$$\sigma \circ (12)(34) \circ \sigma^{-1} = (12)(34)$$
$$\sigma \circ (13)(24) \circ \sigma^{-1} = (13)(24)$$
$$\sigma \circ (14)(23) \circ \sigma^{-1} = (14)(23)$$

Если σ таковы, они должны быть перестановочными (коммутировать) с этими 3-мя перестановками, т.к. $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau \Leftrightarrow \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Можно убедиться, что именно эти три перестановки (и Id) обладают таким свойством.

ЛЕММА

Множество $\{Id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ образует нормальную коммутативную подгруппу в S_4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Каждая из перестановок (**)(**) обратна сама себе. Также легко проверить, что композиция любых двух из них в любом порядке дает третью (замкнутость и коммутативность). Нормальность следует из того, что сопряжение сохраняет цикленную структуру.

ЛЕММА ДОКАЗАНА

Эта подгруппа в S_4 называется **группой Клейна** и играет фундаментальную роль в математике.

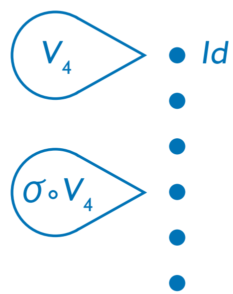
$V_4 = \{Id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ — группа Клейна

ПОЧЕМУ ИХ ЧЕТЫРЕ?

ВОПРОС:

Почему при гомоморфизме $F_5: S_4 \to S_3$ ровно 4 перестановки из S_4 посредством сопряжения на $\{(12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ дают каждую из 6 перестановок на этих трех элементах?

$$F_5: S_4 \to S_3$$



Пусть $\sigma \in S_4$ в результате сопряжения дает некоторую перестановку из S_3. Тогда в композиции с любой $\tau \in V_4$ она даст эту же перестановку:

$(\sigma \circ \tau)(12)(34)(\sigma \circ \tau)^{-1} = \sigma \circ (\tau \circ (12)(34) \circ \tau^{-1}) \circ \sigma^{-1} =$
$= \sigma \circ (12)(34) \circ \sigma^{-1}$

Запись $\sigma \in V_4$ означает все 4 такие композиции, которые образуют блок.

Если бы в V_4 было более 4-х элементов, то в этих блоках было бы более 4-х элементов. Тогда не все перестановки в S_3 были бы реализованы. Но достаточно взять сопряжение композицией перестановок, одна из которых реализует транспозицию, а другая — цикл длины 3, чтобы получить любую перестановку из S_3. Значит, ровно 4 перестановки в ядре гомоморфизма и по 4 реализуют каждую перестановку из S_3.

Итак, уникальность группы S_4 состоит в том, что она содержит помимо подгруппы четных перестановок еще одну нетривиальную нормальную подгруппу — группу Клейна, в отличие от всех остальных групп S_n.

Группа Клейна и корни многочленов

Пусть есть уравнение 4-й степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

Тогда, если x_1, x_2, x_3, x_4 — его корни, следующие три выражения

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4),\ (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) \text{ и } (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$

удовлетворяют некоторой системе уравнений, коэффициенты в которой связаны с коэффициентами a, b, c, d, f. Уравнение в итоге удается свести к уравнению 3-й степени, для которого есть формулы корней.

Именно отсутствие нетривиальной нормальной подгруппы, подобной группе Клейна, в S_n при всех $n \geqslant 5$, не позволяет сделать то же самое для старших степеней.

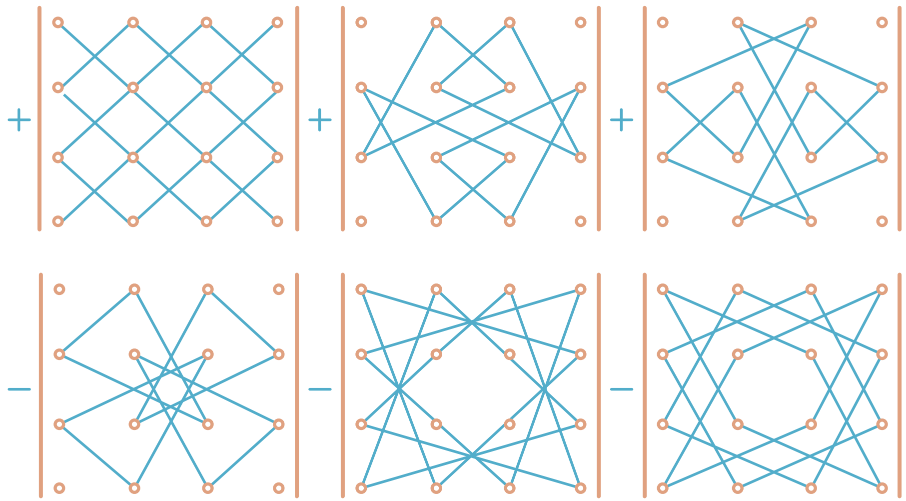
ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ КЛЕЙНА

1 ▶ V_4 изоморфна прямой сумме групп {ч, н}:

$$V_4 \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\{ \begin{matrix} \text{чч} \\ \text{чн} \\ \text{нч} \\ \text{нн} \end{matrix} \right\}$$

2 ▶ Определители в линейной алгебре

Наборы из элементов матрицы при расчете определителя 4-го порядка формируются на основе группы Клейна:



3 ▶ Проецирование из точки на прямую

Двойное отношение четырех точек при проецировании

$$\lambda = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

не меняется при применении к a, b, c, d перестановок из группы Клейна.

4 ▶ Кватернионы

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

5 ▶ Группа вращений в 3-х мерном пространстве.

Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси и группу, образованную Id и вращениями на 180° относительно каждой из осей.

Это те же кватернионы на геометрическом языке и тоже группа Клейна.