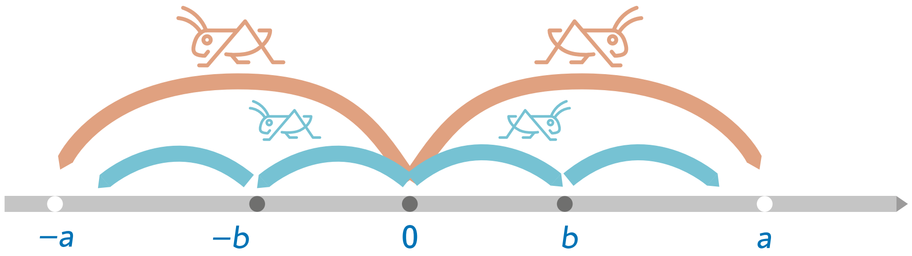
1 ВСТРЕЧА ДВУХ КУЗНЕЧИКОВ НА ПРЯМОЙ

Пусть на прямой с заданной точкой отсчета 0 есть два кузнечика, один из которых совершает прыжки длины a, а другой — длины b. Оба стартуют из точки 0.



ВОПРОС:

Могут ли эти два кузнечика оказаться в одной точке, отличной от 0?

Точки, доступные для кузнечиков:

 $0, a, 2a, -a, -2a, \ldots$

 $0, b, 2b, -b, -2b, \ldots$

> Всегда ли найдутся такие целые числа m и n, что $n \cdot a = m \cdot b$?

КРИТЕРИЙ СОИЗМЕРИМОСТИ ОТРЕЗКОВ

Если a и b — целые, то достаточно взять $m = a$, $n = b$. Иначе, если точка встречи двух кузнечиков существует, то можно разделить равенство
$n \cdot a = m \cdot b$ на $m \cdot n$. Получим:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = c$$

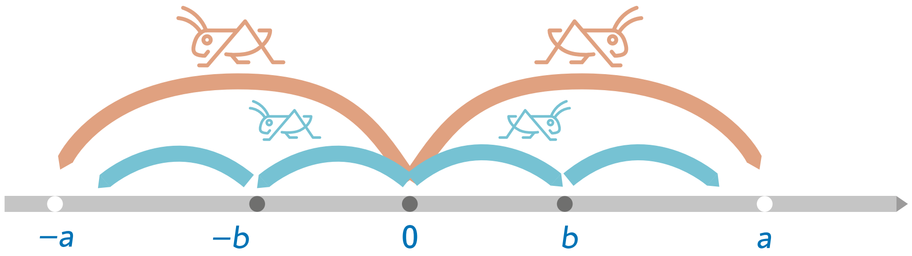
где c — длина некоторого отрезка, который укладывается m раз в отрезке a и n раз в отрезке b.
С другой стороны, если существует такой отрезок c, что для некоторых целых чисел k и l $a = k \cdot c$ и $b = l \cdot c$, то существует точка встречи, до которой кузнечику с прыжком a нужно прыгнуть l раз, а кузнечику с прыжком b нужно прыгнуть k раз.
Мы получили **критерий соизмеримости:**

> Кузнечики с длинами прыжков, равными a и b, могут встретиться на числовой прямой где-то кроме точки 0 тогда и только тогда, когда существует отрезок, который укладывается целое число раз в отрезке a и целое число раз в отрезке b.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

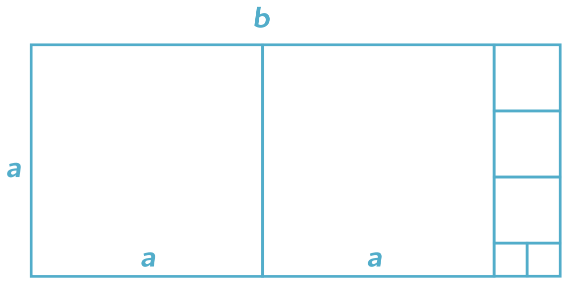
2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Итак, если отрезки a и b соизмеримы (существует отрезок, который целое количество раз укладывается в каждом из них), то кузнечики с прыжками a и b могут встретиться.



А бывает ли так, что отрезки a и b не соизмеримы, т.е. для них не существует общей меры?

Средство для изучения этого вопроса нам предоставил еще Евклид (III в. до н.э.). Построим прямоугольник со сторонами a и b и будем делить с остатком больший прыжок на меньший. То есть будем отрезать квадраты $a \times a$, пока это возможно. Затем от оставшегося прямоугольника будем отрезать квадраты со стороной, равной остатку от деления b на a. И так далее. Это геометрический алгоритм Евклида.



УТВЕРЖДЕНИЕ

Если отрезки a и b соизмеримы, то алгоритм Евклида закончится делением без остатка.

Если c — общая мера отрезков a и b, то на любом этапе алгоритма Евклида каждый квадрат будет содержать целое количество квадратиков размера c, которое постепенно уменьшится до 0.

Обратное утверждение тоже верно: если в конце алгоритма Евклида возник прямоугольник, разбитый на целое количество квадратиков, то можно распространить сетку таких квадратиков на весь исходный прямоугольник $a \times b$, вершины которого попадут в узлы этой сетки.

В итоге мы доказали критерий соизмеримости геометрическим способом:

ТЕОРЕМА

(критерий соизмеримости)
Отрезки a и b соизмеримы $\Leftrightarrow$ алгоритм Евклида, запущенный на прямоугольнике со сторонами a и b конечен.

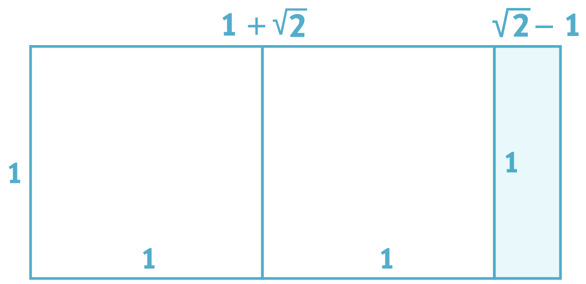
3 НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ОТРЕЗКИ

Убедимся, что отрезки 1 и $\sqrt{2}$ не соизмеримы.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a = 1$ и $b = 1 + \sqrt{2}$ и запустим на нем алгоритм Евклида. Докажем, что он никогда не остановится.

Для этого достаточно доказать, что прямоугольник, получившийся после отсечения двух квадратов 1×1 и имеющий стороны 1 и $\sqrt{2} - 1$, подобен исходному (стороны этих прямоугольников пропорциональны):

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$



Это равенство верно, т.к.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Т.к. маленький прямоугольник подобен исходному, при дальнейшем отсекании квадратов мы получим в остатке прямоугольник, подобный этим двум, и т.д., и алгоритм Евклида будет продолжаться бесконечно.

По критерию соизмеримости отсюда следует, что отрезки 1 и $1 + \sqrt{2}$ не соизмеримы, а значит, и отрезки 1 и $\sqrt{2}$ тоже не соизмеримы.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов