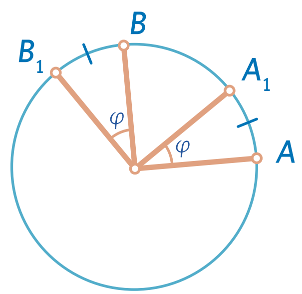
1 ДВИЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

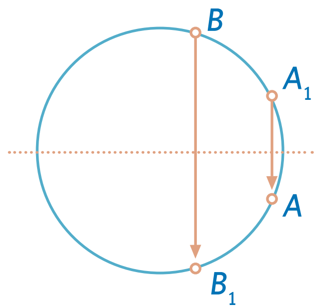
На уроках 5-10 мы изучали движения прямой и окружности.

ДВИЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

ПОВОРОТ R_φ

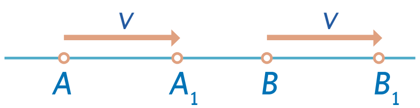


ОТРАЖЕНИЕ S_l

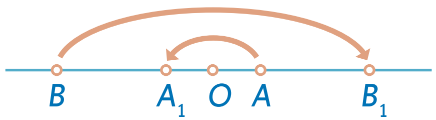


ДВИЖЕНИЯ ПРЯМОЙ

ПЕРЕНОС T_v



ОТРАЖЕНИЕ S_O



ТАБЛИЦЫ КОМПОЗИЦИЙ:

	R	S
R	R	S
S	S	R

ПОДГРУППА

	T	S
T	T	S
S	S	T

ПОДГРУППА

Важное замечание: если прямой задать направление (**ориентацию**), то при отражении это направление меняется на противоположное, а при переносе не изменяется. Аналогично, если задать направление обхода окружности, то при отражении оно меняется на противоположное, а при повороте не изменяется.

Вооружившись знаниями о движениях прямой и окружности, мы будем пытаться понять, какие вообще существуют **движения плоскости**.

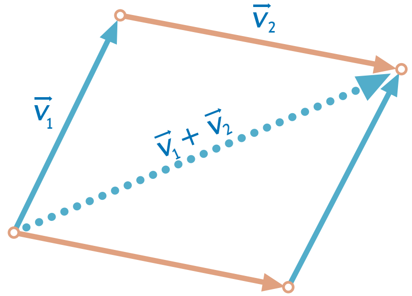
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС $T_{\vec{v}}$

Параллельный перенос — это сдвиг всех точек плоскости на произвольный вектор.
Так как плоскость бесконечна, она может быть сдвинута в любом направлении на вектор любой величины и при этом остаться сама собой.

Вектор на плоскости — это направленный отрезок.

По сути понятия «вектор» и «параллельный перенос — это синонимы, потому что векторы, нарисованные в разных местах плоскости, но имеющие одинаковое направление и величину, равны и задают одно и то же движение плоскости.

Результат сложения двух векторов есть параллельный перенос сначала на один вектор, а затем на другой.



Параллельный перенос плоскости по аналогии с переносом на прямой и поворотом на окружности **не имеет неподвижных точек.**

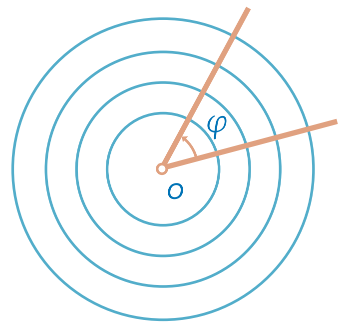
При параллельном переносе на **нулевой** вектор получаем **тождественное преобразование** (Id).

ПОВОРОТ R_{φ}^{O}

У нас есть движение окружности — поворот.
Будем рассматривать плоскость как бесконечное множество концентрических окружностей. Мы получим **поворот плоскости** на некоторый угол φ.

Будет ли поворот плоскости иметь неподвижные точки?

Поворот окружности не имеет неподвижных точек, но на плоскости такая точка есть!
Это **центр** всех концентрических окружностей, которые мы поворачиваем относительно нее на угол φ.



R_{φ}^{O} — поворот плоскости на угол φ относительно точки O.

Понятно, что композиция двух поворотов относительно одной и той же точки есть поворот на суммарный угол.

$$R_{\varphi}^{O} \circ R_{\psi}^{O} = R_{\varphi+\psi}^{O}$$

Гораздо более сложный вопрос:
Каким преобразованием будет являться композиция поворотов относительно двух различных точек плоскости.

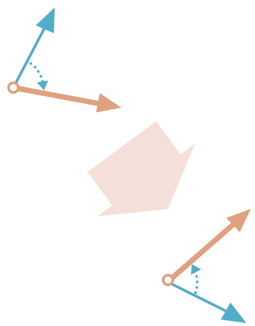
$$R_{\varphi}^{O} \circ R_{\psi}^{A} = ?$$

3 ОТРАЖЕНИЕ S_l

Если мы плоскость повернем к себе «обратной стороной», она перейдет сама в себя, но при этом изменится ее ориентация.

> Ориентацию плоскости не так просто формализовать. Мы сделаем это следующим образом.

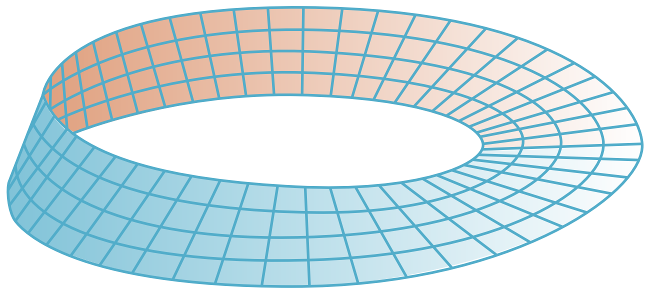
Возьмем два вектора на плоскости и посмотрим, в каком направлении поворачивается плоскость от первого ко второму. Если в результате движения плоскости эти векторы перешли в другую пару векторов, и направление изменилось, то в результате движения поменялась ориентация плоскости.



> Чтение на вырост:
> В книге В. Прасолова «Геометрия Лобачевского» есть добавление О.Бугаенко «Три подхода к определению ориентации поверхности»

Важно понимать, что плоскость — это **ориентируемая** поверхность, то есть для нее можно определить преобразование, меняющее ориентацию.

Существуют **неориентируемые** поверхности, например, **лента Мёбиуса**. Невозможно покрасить одну сторону ленты Мёбиуса одной краской, а другую — другой, потому что по сути у нее только одна сторона.



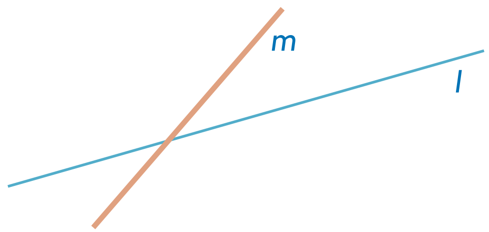
Итак, отражение плоскости относительно некоторой прямой l меняет ориентацию плоскости.

> Отражение S_l имеет бесконечно много неподвижных точек: это сама прямая l.

ВОПРОС:

Что из себя представляет композиция отражений плоскости относительно двух разных прямых?

$$S_l \circ S_m = ?$$



4 $S_l \circ S_m = ?$

Что из себя представляет композиция отражений плоскости относительно двух разных прямых?

1-Й СЛУЧАЙ ▶ прямые m и l совпадают.

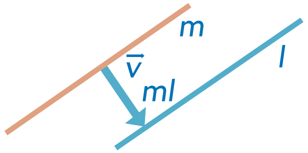
$$S_l \circ S_m = Id$$

2-Й СЛУЧАЙ ▶ прямые m и l пересекаются.

Пусть O — точка их пересечения. Тогда для окружности с центром в этой точке композиция двух отражений есть поворот на удвоенный угол между прямыми m и l.

$$S_l \circ S_m = R^O_{2<(m,l)}$$

3-Й СЛУЧАЙ ▶ прямые m и l параллельны.



Найдем вектор $\vec{v}$, равный расстоянию между этими двумя прямыми, идущий от прямой m к прямой l перпендикулярно им обеим. Можно убедиться, что в этом случае:

$S_l \circ S_m = T_{2\vec{v}_{ml}}$ — перенос на удвоенный вектор $\vec{v}_{ml}$.

ВОПРОС:

Мы нашли три вида движений плоскости. Будет ли эта классификация полной?

По аналогии с изучением движений окружности, мы будем двигаться к ответу на этот вопрос через количество неподвижных точек движения.