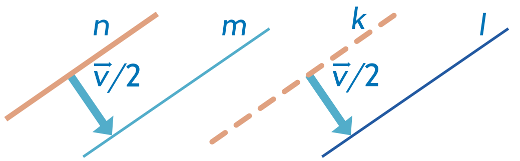
КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ ПО КОЛИЧЕСТВУ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

1. Существуют неподвижные точки в вершинах треугольника $\Rightarrow g = Id$;
2. Существуют 2 неподвижные точки $\Rightarrow$ неподвижна вся прямая, $g = S_l$;
3. Существует 1 неподвижная точка $\Rightarrow g = R^O_\varphi$;
4. Нет неподвижных точек $\Rightarrow g = T_{\bar{v}}$ либо $g = S_l \circ S_m \circ S_n$

Замечание: поворот является композицией двух отражений относительно пересекающихся прямых, а параллельный перенос — относительно параллельных прямых.

Осталось узнать, что за движение может быть задано как $g = S_l \circ S_m \circ S_n$.

1-Й СЛУЧАЙ Все прямые параллельны: $l \parallel m \parallel n$



$S_m \circ S_n = T_{\bar{v}}$

Проведем прямую $k \parallel l$ на расстоянии $v/2$.

Тогда $S_l \circ S_k = T_{\bar{v}} \Rightarrow g = S_l \circ S_m \circ S_n = S_l \circ S_l \circ S_k = S_k$.

2-Й СЛУЧАЙ

Какие-то 2 прямые не параллельны. Тогда либо $g = S_l \circ R^O_\varphi$, либо $g = R^O_\varphi \circ S_n$, где

R^O_φ — некоторый поворот относительно точки O на угол φ. Изучим, что это за движения.

Рассмотрим случай $g = R^O_\varphi \circ S_n$.
Если точка O лежит на прямой n, то все прямые l, m, n пересекаются в точке O, и аналогично случаю с движениями окружности, g есть отражение.

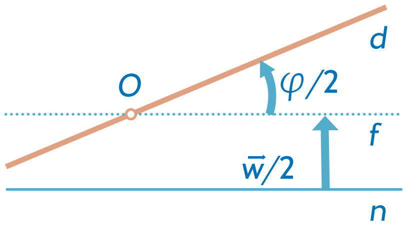
Интересным является случай, когда точка O не лежит на прямой n. Он дает принципиально новый вид движения плоскости, который мы изучим далее.

СКОЛЬЗЯЩАЯ СИММЕТРИЯ

При классификации движений плоскости нам осталось рассмотреть, что за движение может быть задано как $g = S_l \circ S_m \circ S_n$, когда прямые l, m и n не параллельны и не пересекаются в одной точке.

Пусть прямые l и m пересекаются в точке O.
Тогда $S_l \circ S_m = R^O_\varphi$, где $\varphi = 2\angle(m, l)$.

Представим $R^O_\varphi = S_d \circ S_f$, где $f \parallel n$, $\angle(f, d) = \varphi/2$.

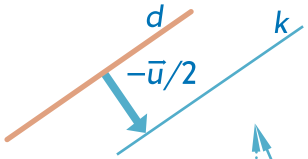


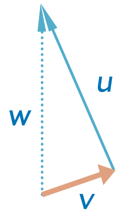
Тогда: $g = R_\varphi^O \circ S_n =$
$= S_d \circ S_f \circ S_n = S_d \circ T_{\vec{w}}$, где $\vec{w}$ — вектор, перпендикулярный прямым f и n и равный удвоенному расстоянию между ними.

Разложим перенос на вектор $\vec{w}$ в композицию:

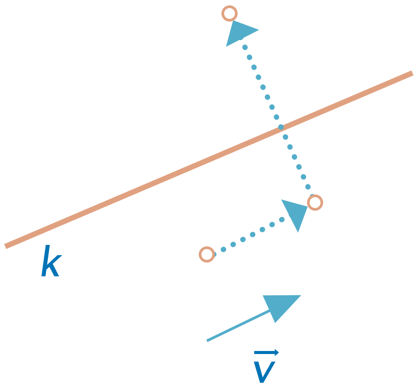
$T_{\vec{w}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$, где $\vec{u} \perp d$, $\vec{v} \parallel d$

Тогда $g = S_d \circ T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = S_k \circ T_{\vec{v}}$,
где $k \parallel d$ — прямая, отстоящая от d на вектор $-\vec{u}/2$





В итоге мы получили, что g есть композиция параллельного переноса вдоль некоторой прямой и отражения относительно этой же прямой.
Такое движение называется **скользящей симметрией**.



$L_k^{\vec{v}} = S_k \circ T_{\vec{v}}$

ЗАМЕЧАНИЕ:

Перенос вдоль прямой и отражение относительно этой же прямой перестановочны:

$S_k \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_k$

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ ПО КОЛИЧЕСТВУ ОТРАЖЕНИЙ

Подводим итог в следующей таблице.

Любое движение плоскости есть композиция 0-3 отражений:

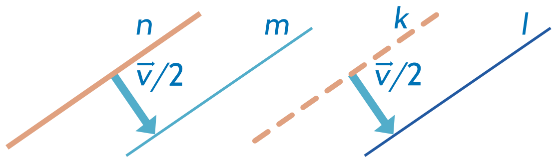
0 ▶ Id — тождественное преобразование

1 ▶ S_l — отражение относительно прямой l

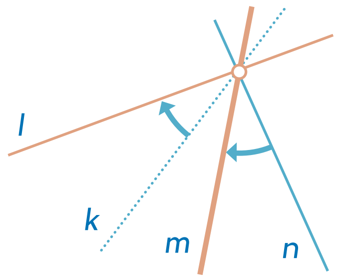
2 **1** ▶ $l \parallel m \Rightarrow S_l \circ S_m = T_{\vec{v}}$ — перенос на удвоенное расстояние между прямыми

2 ▶ $S_l \circ S_m = R_\varphi^O$ — поворот на удвоенный угол между прямыми вокруг точки их пересечения

3 **1** ▶ $l \parallel m \parallel n \Rightarrow S_l \circ S_m \circ S_n = S_k$, где k — параллельная всем трем прямая, лежащая от l на таком же расстоянии, как n от m.

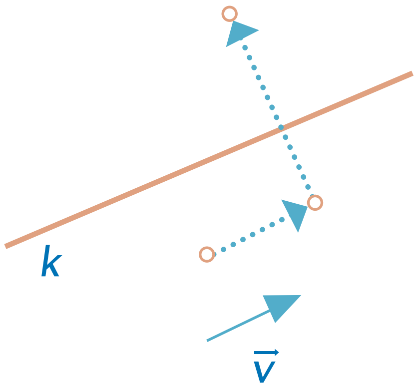


2 ▶ все прямые пересекаются в одной точке
$\Rightarrow S_l \circ S_m \circ S_n = S_k$, где k — прямая, проходящая через эту же точку и отстоящая от l на тот же угол, что и n от m.



3 3 $S_l \circ S_m \circ S_n = L_k^{\overline{v}} = S_k \circ T_{\overline{v}}$

скользящая симметрия (перенос вдоль прямой k на вектор $\overline{v}$ и отражение относительно прямой k).



При этом перенос и отражение перестановочны:

$S_k \circ T_{\overline{v}} = T_{\overline{v}} \circ S_k$

Как построить прямую k и вектор $\overline{v}$ по данным прямым l, m и n, описано выше при введении понятия скользящей симметрии.