1 ТАБЛИЦА КОМПОЗИЦИЙ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

Заметим, что 4 вида движений плоскости разбиваются на 2 группы: переносы (T) и повороты (R) не меняют ориентацию плоскости, а отражения (S) и скользящая симметрия (L) — меняют. Значит, композиции T и R и композиции S и L будут давать T и R, а композиции меняющего и не меняющего ориентацию плоскости будут давать S и L.

Общий вид таблицы композиций движений плоскости будет таким:

<table>
<tr><th></th><th>T</th><th>R</th><th>S</th><th>L</th></tr>
<tr><th>T</th><td colspan="2" rowspan="2">T, R</td><td colspan="2" rowspan="2">S, L</td></tr>
<tr><th>R</th></tr>
<tr><th>S</th><td colspan="2" rowspan="2">S, L</td><td colspan="2" rowspan="2">T, R</td></tr>
<tr><th>L</th></tr>
</table>

Таким образом, мы можем говорить о гомоморфизме ψ, который переводит группу движений плоскости в группу из двух элементов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ (или {чет, нечет} по сложению), с которой мы не раз встречались:

$\psi(\{T, R\}) = 1$

$\psi(\{S, L\}) = -1$, где $\{T, R\}$ — множество всех переносов и поворотов, а $\{S, L\}$ — множество всех отражений и скользящих симметрий.

Таким образом, T и R образуют подгруппу (**собственных** движений плоскости).

На этом уроке мы заполним подгруппу переносов и поворотов.

Очевидно, что композиция двух переносов есть перенос на суммарный вектор, как и в случае с движениями прямой:

$$T_{\bar{v}} \circ T_{\bar{w}} = T_{\bar{v}+\bar{w}} = T_{\bar{w}} \circ T_{\bar{v}}$$

Таким образом, переносы сами по себе тоже образуют подгруппу.

КОМПОЗИЦИЯ ПЕРЕНОСА И ПОВОРОТА

УТВЕРЖДЕНИЕ:

Композиция переноса и поворота есть поворот на тот же угол относительно другой точки:

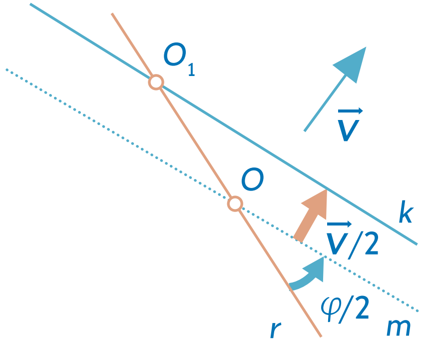
$$T_{\bar{v}} \circ R_{\varphi}^{O} = R_{\varphi}^{O_1}, \quad R_{\psi}^{A} \circ T_{\bar{w}} = R_{\psi}^{A_1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поворот есть композиция двух отражений относительно прямых, угол между которыми есть $\varphi/2$. А перенос есть композиция двух отражений относительно параллельных прямых, расстояние между которыми равно $\bar{v}/2$.

Докажем сначала, что

$$T_{\bar{v}} \circ R_{\varphi}^{O} = R_{\varphi}^{O_1}.$$



Представим и поворот, и перенос в виде таких композиции отражений, чтобы внутри композиции два отражения совпали:

$T_{\vec{v}} = S_k \circ S_m$

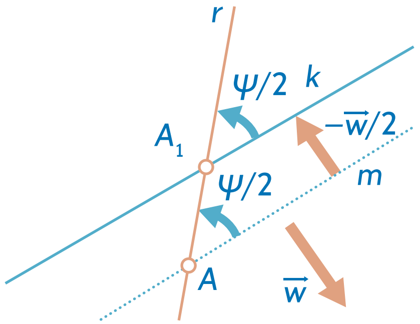
$R_\varphi^O = S_m \circ S_r$

Тогда $T_{\vec{v}} \circ R_\varphi^O = S_k \circ S_m \circ S_m \circ S_r = S_k \circ S_r = R_\varphi^{O_1}$,

где O_1 — точка пересечения прямых k и r.

Докажем теперь, что $R_\psi^A \circ T_{\vec{w}} = R_\psi^{A_1}$

Проведем через точку A прямую m, перпендикулярную $\vec{w}$.



Подберем прямые k и r так, что:

$T_{\vec{w}} = S_m \circ S_k$

$R_\psi^A = S_r \circ S_m$

Тогда $R_\psi^A \circ T_{\vec{w}} = S_r \circ S_m \circ S_m \circ S_k = S_r \circ S_k = R_\psi^{A_1}$.

где A_1 — точка пересечения прямых r и k.

УТВЕРЖДЕНИЕ ДОКАЗАНО

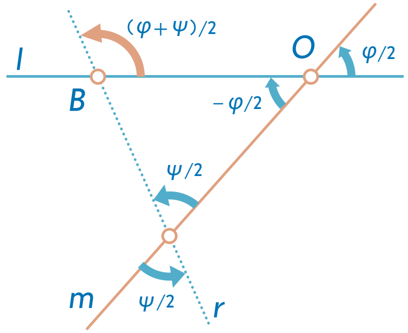
КОМПОЗИЦИЯ ДВУХ ПОВОРОТОВ

$R_\psi^A \circ R_\varphi^O = ?$

Если точки O и A совпадают, то $R_\psi^O \circ R_\varphi^O = R_{\varphi+\psi}^O$ как в случае с окружностью.

Будем рассматривать случай, когда O и A — две разные точки.

Проведем через точки O и A прямую m. Представим каждый из поворотов в виде композиции отражений, одно из которых осуществляется относительно прямой m, а другое — относительно прямых l и r, повернутых относительно m на углы $-\varphi/2$ и $\psi/2$ соответственно.



$R_\psi^A = S_l \circ S_m$

$R_\varphi^O = S_m \circ S_r$

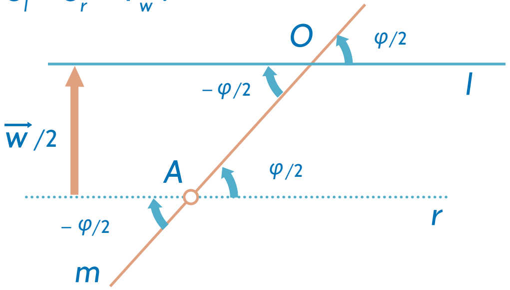
Тогда $R_\psi^A \circ R_\varphi^O = S_l \circ S_m \circ S_m \circ S_r = S_l \circ S_r = R_{\varphi+\psi}^B$.

где B — точка пересечения прямых l и r.

Заметим, что при $\varphi + \psi = 0$ прямые l и r будут параллельны. Что мы получим в этом случае?

 $R_\psi^A \circ R_\varphi^O = S_l \circ S_m \circ S_m \circ S_r = S_l \circ S_r = T_{\vec{w}}$.

где $\vec{w}$ — вектор, перпендикулярный прямым l и r и равный удвоенному расстоянию между ними.



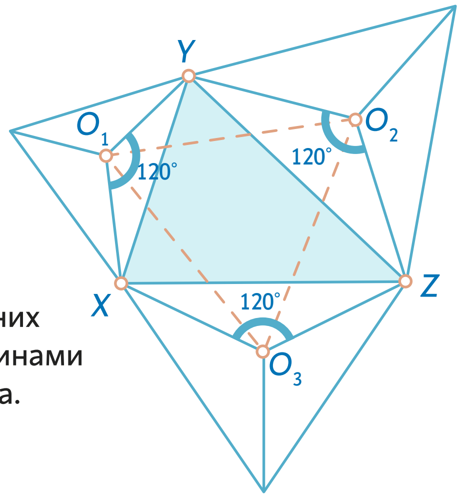
Таким образом, композиция двух поворотов есть поворот относительно новой точки на сумму углов этих поворотов. Если же повороты осуществляются на противоположные углы $(\varphi + \psi = 0)$, то результатом композиции будет параллельный перенос.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ НАПОЛЕОНА

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

На сторонах произвольного треугольника построены равносторонние треугольники.

Доказать, что центры симметрии этих равносторонних треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.



РЕШЕНИЕ

Применим к этой задаче полученные нами знания о движениях плоскости.

Рассмотрим движение плоскости:

$$g = R_{120^\circ}^{O_3} \circ R_{120^\circ}^{O_2} \circ R_{120^\circ}^{O_1}$$

Это либо поворот, либо перенос. Композиция двух поворотов, стоящих справа, является поворотом относительно некоторой точки A:

$$R_{120^\circ}^{O_2} \circ R_{120^\circ}^{O_1} = R_{240^\circ}^{A}$$

Так как $120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$, что равнозначно 0°,

$$g = R_{120^\circ}^{O_3} \circ R_{240}^{A} = T_{\vec{v}}$$

При переносе нет неподвижных точек. Однако, точка X при данной композиции трех поворотов сначала перейдет в Y, затем в Z, затем в X. То есть останется на месте.
А значит, $g = Id$.

$$R_{120^\circ}^{O_3} \circ R_{240^\circ}^{A} = Id \Rightarrow A = O_3$$

Т.к. $R_{120^\circ}^{O_2} \circ R_{120^\circ}^{O_1} = R_{240^\circ}^{A}$, точка A должна быть расположена так, что прямые O_1A и O_2A проходят под углами $120^\circ:2 = 60^\circ$ к прямой O_1O_2. Значит, O_1, O_2 и $A = O_3$ есть вершины равностороннего треугольника.

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ.

Таким образом, мы заполнили таблицу композиций движений плоскости для подгруппы собственных движений:

	$T_{\vec{v}}$	R_φ^O
$T_{\vec{w}}$	$T_{\vec{v}+\vec{w}}$	$R_\varphi^{O_1}$
R_ψ^A	$R_\psi^{A_1}$	$T_{\vec{u}}$ при $\varphi + \psi = 0$ $R_{\varphi+\psi}^B$ иначе

Заметим, что внутри этой подгруппы содержится подгруппа переносов.