# 1 СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

На прошлом уроке мы познакомились с новой конструкцией — комплексным числом:

$z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$,
$i$ — мнимая единица: $i^2 = -1$

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА:

Любое число вида $a + bi$ строится как композиция двух параллельных переносов: на вектор $a$ вдоль горизонтальной оси и на вектор $b$ вдоль вертикальной оси.

Комплексное число $a + bi$ можно рассматривать как вектор, исходящий из начала координат, с концом в точке $(a, b)$.

Комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ считаются равными тогда и только тогда, когда их вещественные и мнимые части совпадают: $a = c$, $b = d$.

Наша задача ввести на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ четыре операции арифметических действий, которые существуют в $\mathbb{R}$.

## СЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть есть два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ . Рассмотрим их сумму:

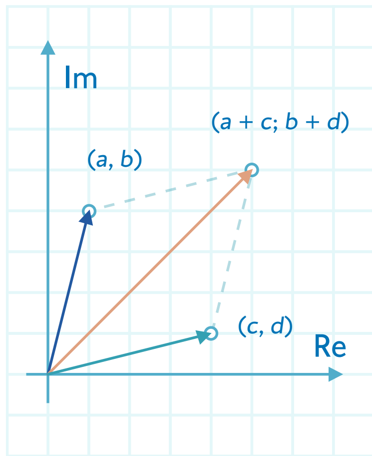
$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di =$$
$$= (a + c) + (b + d)i \text{ , где } a + c \in \mathbb{R},\ b + d \in \mathbb{R}$$

Таким образом, результатом сложения двух комплексных чисел будет комплексное число, вещественная часть которого есть сумма вещественных частей, а мнимая часть — сумма мнимых частей слагаемых:

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Re}(z + w) &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) \\ \mathrm{Im}(z + w) &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w) \end{aligned}$$

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЛОЖЕНИЯ:

Каждое из слагаемых есть композиция переносов вдоль горизонтальной и вертикальной осей. Так как параллельные переносы на плоскости образуют абелеву (коммутативную) группу относительно операции композиции, при сложении мы можем менять в композиции порядок применения переносов. Получаем, что сумма векторов будет соответствовать вектору суммы.



## 2 СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Мы убедились, что по сложению комплексные числа образуют группу, изоморфную абелевой группе параллельных переносов.

Поэтому для любых комплексных чисел $z$, $w$, $r$ выполнены все свойства абелевой группы:

1 ▶ $(z + w) + r = z + (w + r)$ (закон ассоциативности)

2 ▶ $z + w = w + z$ (закон коммутативности)

3 ▶ существование нейтрального элемента: $z + 0 = z$

4 ▶ существование обратного (противоположного) элемента:

$z = a + bi \quad \Rightarrow \quad -z = -(a + bi) = -a - bi$
$z + (-z) = a + bi + (-a - bi) =$
$= (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$

## ВЫЧИТАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вычитание комплексных чисел можно рассматривать как сложение с противоположным числом:

$$(a + bi) - (c + di) = (a + (-c)) + (b + (-d))i = (a - c) + (b - d)i$$

Разность двух комплексных чисел есть комплексное число, вещественная часть которого есть разность вещественных частей, а мнимая часть — разность мнимых частей исходных чисел:

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}(z - w) = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w)$$
$$\mathrm{Im}(z - w) = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(w)$$

## УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Возьмем два комплексных числа в алгебраической форме $z = a + bi,\ w = c + di$ и перемножим их аналогично умножению вещественных чисел:
$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2$

Вспоминая, что по определению $i^2 = -1$, и группируя вещественные и мнимые слагаемые, получим:
$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$

В качестве произведения двух комплексных чисел мы получили новое комплексное число, такое что
$\mathrm{Re}(z \cdot w) = ac - bd, \quad \mathrm{Im}(z \cdot w) = bc + ad$

### ПРИМЕРЫ:

$(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 + i - i - i^2 = 1 - (-1) = 2$

# 3 СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Изучим некоторые свойства умножения. Для любых комплексных чисел выполнено:

1. $zw = wz$ (закон коммутативности)
2. $z(w_1 + w_2) = zw_1 + zw_2$ (закон дистрибутивности относительно сложения)

ПРИМЕРЫ:

$(2 + i)(i + 3 - 2i) = (2 + i)(3 - i) = 6 + 3i - 2i - i^2 = 7 + i$

С другой стороны,

$(2 + i)i + (2 + i)(3 - 2i) = 2i - 1 + 6 + 3i - 4i - 2i^2 = 7 + i$