1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА: СОПРЯЖЕНИЕ, МОДУЛЬ, НОРМА, ДЕЛЕНИЕ

СОПРЯЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

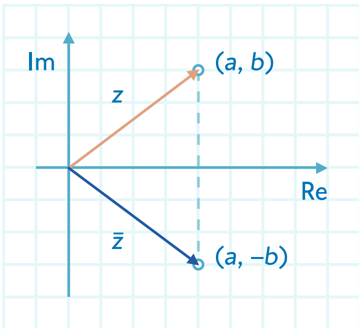
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если $z = a + bi$ — произвольное комплексное число, то комплексное число $a - bi$ называют **сопряженным** с числом z.

Обозначение сопряженного числа: $\bar{z} = a - bi$.

Заметим, что для комплексного числа $\bar{z} = a - bi$ сопряженным будет число $z = a + bi$, поэтому z и $\bar{z}$ называют **взаимно сопряженными**.

Геометрически сопряжение комплексного числа представляет собой отражение вектора этого комплексного числа относительно вещественной оси.



Некоторые свойства сопряжения:

$Re\ \bar{z} = Re\ z$

$Im\ \bar{z} = Im\ z$

$\bar{z} = z \;\Rightarrow\; z, \bar{z} \in \mathbb{R}$ (при отражении относительно вещественной оси множество неподвижных точек совпадает с вещественной осью);

$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z = bi$ — чисто мнимое комплексное число. Для мнимой единицы $i = 0 + 1 \cdot i$ сопряженным будет число $-i = 0 - 1 \cdot i$

СОПРЯЖЕНИЕ СУММЫ, РАЗНОСТИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1 Число, сопряженное с суммой комплексных чисел есть сумма сопряженных с ними:

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$$

Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, $\quad z = a + bi,\ w = b + di$

$$\overline{(z + w)} = \overline{(a + c + (b + d)i)} = (a + c) - (b + d)i =$$
$$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$$

2 Число, сопряженное с разностью комплексных чисел есть разность сопряженных с ними:

$$\overline{(z - w)} = \bar{z} - \bar{w}$$

Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, $\quad z = a + bi,\ w = b + di$

$$\overline{(z - w)} = \overline{(a - c + (b - d)i)} = (a - c) - (b - d)i =$$
$$= (a - bi) - (c - di) = \bar{z} - \bar{w}$$

3 Число, сопряженное с произведением двух комплексных чисел есть произведение сопряженных с ними:

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \qquad \overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Действительно,

$$\overline{(z \cdot w)} = \overline{(ac - bd) + (bc + ad)i} = (ac - bd) - (bc + ad)i$$

С другой стороны,

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)\,(c - di) =$$
$$= ac - bci - adi + bdi^2 = (ac - bd) - (bc + ad)i$$

Правые части равенств одинаковы, значит, равны и левые части.

2 НОРМА И МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Сумма и произведение взаимно сопряженных чисел вещественны:

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = (a + a) + (b - b)i = 2a$$

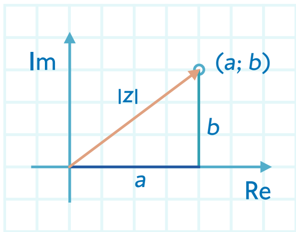
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормой комплексного числа $z = a + bi$ называется число $N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Модулем комплексного числа называется расстояние от точки с координатами $(a; b)$ до начала координат.

Модуль комплексного числа обозначается $|z|$ и равен длине вектора, соответствующего этому комплексному числу.



По теореме Пифагора $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Если число $z = a \in \mathbb{R}$, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ — модуль вещественного числа в обычном понимании.

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЯ

1 $|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0$

Очевидно, т. к. $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$.

2 У взаимно сопряженных комплексных чисел модули равны: $|\bar{z}| = |z|$

Действительно, если $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, то

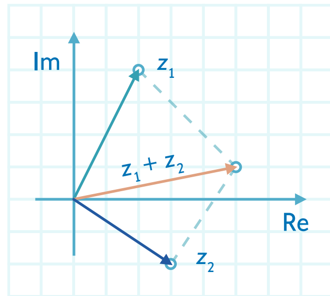
$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

3 Пусть z_1 и z_2 — произвольные комплексные числа.

Тогда выполнено **неравенство треугольника**:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Если $z_1 \neq \alpha z_2$, то геометрически векторы комп лексных чисел z_1 и z_2 и вектор их суммы $z_1 + z_2$ образуют треугольник, а длина стороны треугольника всегда меньше суммы двух других сторон.



Если $z_1 = \alpha z_2$ для некоторого положительного числа $\alpha \in \mathbb{R}$, то неравенство треугольника превращается в равенство:

$$|z_1 + z_2| = |\alpha z_2 + z_2| = (\alpha + 1)|z_2| = \alpha|z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Это соответствует ситуации, когда векторы комплексных чисел z_1 и z_2 параллельны и сонаправлены, и треугольник схлопывается.

МОДУЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

$|zw| = ?$

Разберемся сначала с нормой произведения:

$$\mathrm{N}(zw) = zw\overline{(zw)} = zw(\bar{z} \cdot \bar{w}) = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(w)$$

Норма произведения равна произведению норм.
Т. к. модуль — квадратный корень из нормы, получаем, что и для модуля это верно:

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

Таким образом, при умножении расстояния комплексных чисел до нуля перемножаются.

Заметим, что из факта о норме произведения комплексных чисел автоматически следует красивое тождество.

Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$. Тогда:

$$\mathrm{N}(zw) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2,$$

$$\mathrm{N}(z)\mathrm{N}(w) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Из равенства этих выражений получаем тождество:

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

ОБРАТНОЕ К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ

Пусть $z \neq 0$ — произвольное комплексное число.

Тогда: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{\mathrm{N}(z)}$

Здесь мы воспользовались тем, что домножив и разделив на сопряженное к z число, мы получаем в знаменателе вещественное число — норму z.

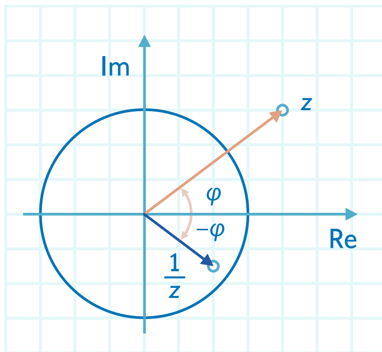
Запишем то же самое в координатах.
Пусть $z = a + bi$ и $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Тогда:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Таким образом:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Геометрически обратное к комплексному числу z будет иметь аргумент, равный $-\arg z$, а модуль, равный $\dfrac{1}{|z|}$.



4 ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Деление на комплексное число можно рассматривать как умножение на обратное к нему.
Пусть z, w — произвольные комплексные числа, причем $w \neq 0$. Тогда:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{z \cdot \overline{w}}{N(w)}.$$

Заметим, что число, сопряженное с частным двух комплексных чисел есть частное сопряженных с ними:

$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} \quad \overline{(z : w)} = \overline{z} : \overline{w}.$$

Действительно, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{(z\overline{w})}}{N(w)} = \frac{\overline{z}w}{N(\overline{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$

В алгебраической форме для $z = a + bi$, $w = c + di$ частное выглядит так:

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Так как в дополнение к перечисленным выше свойствам умножения, мы установили существование в $\mathbb{C}$ обратного для любого ненулевого комплексного числа, можем заключить, что $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ есть поле.