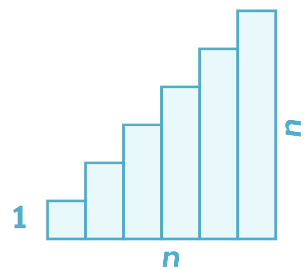
1 СУММА ПОДРЯД ИДУЩИХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

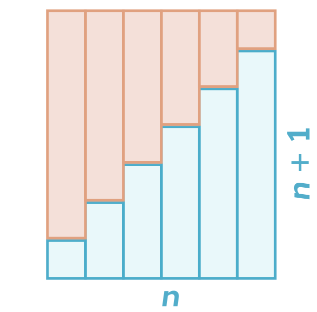
ВОПРОС:

Чему равна сумма $1 + 2 + 3 + \dots + n$?

По легенде великий математик К.Ф. Гаусс, будучи ребенком, получил такую задачу на уроке и предложил следующее решение.



Можно рассматривать числа как площади, и тогда для чисел $1, 2, 3, \dots, n$ получим ряд прямоугольников:



Возьмем такой же ряд, перевернем «вверх ногами» и сопоставим с первым как кирпичики «тетриса». Размер получившегося прямоугольника будет $n \times (n + 1)$.

Следовательно, взяв две такие суммы, мы получим прямоугольник площади $n \cdot (n + 1)$:

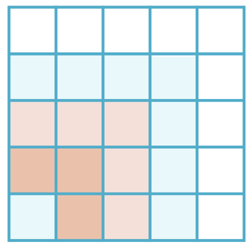
$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + n \\ +\;\; \\ 1 + 2 + \dots + n \end{array} = n \cdot (n + 1) \Rightarrow 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Число, стоящее справа, всегда будет целым, т.к. одно из двух последовательных чисел всегда четно, и, следовательно, их произведение делится без остатка на 2.

СУММА ПОДРЯД ИДУЩИХ НЕЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ

ВОПРОС:

Чему равна сумма $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$?



Снова представляя числа как площади, можно построить следующую фигуру:

С одной стороны, площадь каждого следующего «уголка» увеличивается ровно на 2 по сравнению с предыдущим, а значит, равна следующему нечетному числу.

С другой стороны, каждый «уголок» площадью $2n - 1$ дополняет фигуру до квадрата со стороной n. Следовательно:

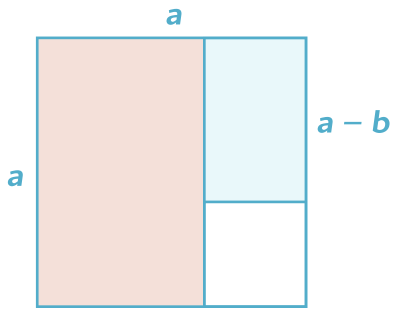
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

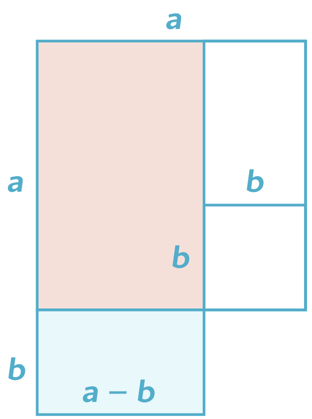
Докажем геометрическим способом формулу разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$



Вырежем из квадрата со стороной a квадрат со стороной b. Это геометрическая интерпретация левой части равенства.

Перенесем прямоугольник со сторонами $a - b$ и b вниз. Получим прямоугольник со сторонами $a - b$ и $a + b$. Это геометрическая интерпретация правой части равенства. Площадь осталась той же самой ⇒ равенство справедливо.



Алгебраический вывод формулы разности квадратов:

$$(a - b)(a + b) = (a - b)a + (a - b)b = a^2 - \cancel{ba} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Геометрическая интерпретация более наглядна, однако в отличие от алгебраической, требует положительности чисел a и b.

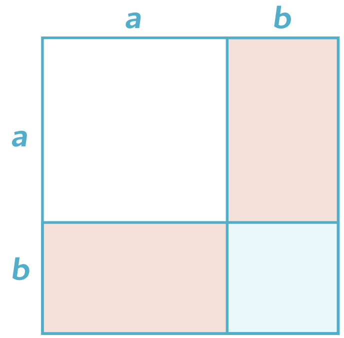
БИНОМ НЬЮТОНА ПРИ N = 2

Рассмотрим геометрическую интерпретацию бинома Ньютона при $n = 2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Это квадрат со стороной $a + b$. Разобьем его сторону на отрезки длины a и b.

Получим квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два прямоугольника размером $a \times b$.



Просуммировав соответствующие площади, получим:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Мы вывели формулу бинома Ньютона при $n = 2$.

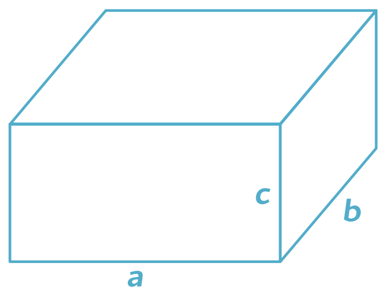
Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 БИНОМ НЬЮТОНА ПРИ N = 3

Попробуем выписать, чему равно $(a + b)^3$, исходя из геометрической интерпретации.

Если произведения двух чисел мы визуализировали на плоскости, то произведения трех чисел (в частности, кубы чисел) нужно визуализировать в трехмерном пространстве.

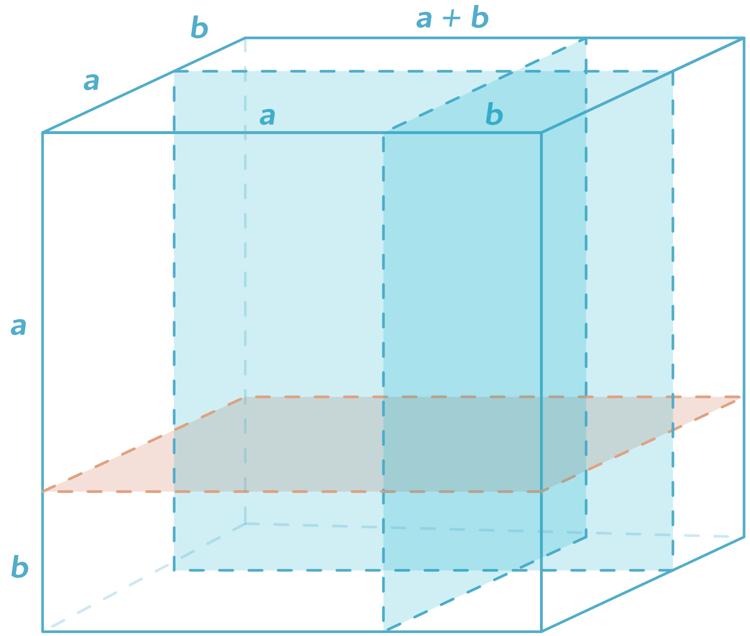
Например, прямоугольный параллелепипед с размерами a, b и c имеет объем, равный $a \cdot b \cdot c$.



Таким образом, куб числа это объем куба со стороной, равной этому числу.

Построим куб со стороной, равной $a + b$. Разделим три стороны куба, исходящие из одной вершины, на отрезки длины a и b. Через точки, разделяющие отрезки, проведем плоскости, параллельные граням куба и разрезающие его на 8 кусков.

Получим куб со стороной a, куб со стороной b, три одинаковых прямоугольных параллелепипеда размера $a \times a \times b$ и три одинаковых прямоугольных параллелепипеда размера $a \times b \times b$.



Тогда для объемов этих тел выполнено равенство:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Мы вывели формулу бинома Ньютона при $n = 3$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

4 БИНОМ НЬЮТОНА ПРИ N = 4

Мы будем пытаться получить общую формулу бинома Ньютона для произвольного n:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdot \ldots \cdot (a+b).$$

Сначала попробуем получить ее для $n = 4$ по аналогии с $n = 2$ и $n = 3$. Для этого представим себе 4-х мерный куб со стороной $a + b$ в 4-х мерном пространстве. Из одной вершины этого куба выходит 4 взаимно перпендикулярные стороны. Откладываем на них отрезки длины a и делаем через эти точки четыре 3-х мерных разреза, которые разбивают наш куб на 16 частей.

Эти части будут включать в себя:
4-х мерный куб со стороной a,
4-х мерный куб со стороной b,
а также, 3 вида 4-х мерных параллелепипедов, размеры которых — сочетания по 4 из пары отрезков a, b: $aaab$, $aabb$, $abbb$.
Осталось понять, сколько будет таких параллелепипедов.

По аналогии с предыдущими случаями, их количество соответствует всем возможным расположениям в этих четверках элементов a и b друг относительно друга:
$aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$ итого $4a^3b$
$aabb$, $bbaa$, $abab$, $baba$, $baab$, $abba$ итого $6a^2b^2$
$abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$ итого $4ab^3$.

Понимая под 4-х мерными объемами этих частей произведение длин 4-х взаимно перпендикулярных сторон, получаем:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Можно убедиться, что сумма коэффициентов в получившемся выражении равна 16, по количеству частей, на которые мы разрезали наш 4-х мерный куб.
Это количество, как и в случаях $n = 2$ и $n = 3$, соответствует 2^n.

БИНОМ НЬЮТОНА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ n

Формулу бинома Ньютона для произвольного n мы приведем без доказательства.
По аналогии с рассмотренными случаями $n = 2, 3, 4$ формула будет содержать $n + 1$ слагаемых, которые будут содержать a и b в степенях, дополняющих друг друга до n. При этом сумма всех коэффициентов будет равна 2^n.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n$$

Коэффициент

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

означает количество способов, которыми можно выбрать из n мест те k мест, на которых будет стоять b в произведении $a^{n-k}b^k$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов