Мы узнали, что умножение на комплексное число, есть композиция двух преобразований плоскости: движения (поворота) и гомотетии. Это **поворотная гомотетия**.

> При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Теперь поговорим о возведении в степень и о том, как извлечь корень из комплексного числа.

Пусть $x = a + bi$. Тогда $x^n = (a + bi)^n$.

Раскрыв скобки по формуле бинома Ньютона, мы получим громоздкую формулу.

А в тригонометрической форме получим гораздо более простой вид:

$x^n = |x|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

А как будет вести себя корень?

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим уравнение $x^2 = y$.

Возведение в квадрат комплексного числа есть возведение в квадрат его модуля и удвоение его аргумента.

Исходя из того, что при возведении в квадрат аргумент комплексного числа удваивается, решение $x = \sqrt{y}$ должно лежать на биссектрисе угла φ, где $\varphi = \arg y$. Модуль числа x очевидно будет равен $|x| = \sqrt{|y|}$ — квадратный корень в обычном его понимании для вещественных чисел.

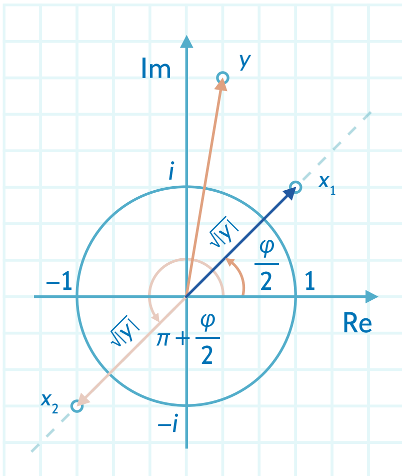
Заметим, что решений будет 2. Если мы продолжим биссектрису угла φ за начало координат и отложим на этом продолжении отрезок длиной $\sqrt{|y|}$, мы получим комплексное число $-x$, противоположное числу x.
Это следует из того, что:

$\arg y = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{2}\arg y = \frac{\varphi}{2} + \pi k \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ решения: } \frac{\varphi}{2} \text{ и } \frac{\varphi}{2} + \pi.$$

Аргумент $\frac{\varphi}{2} + \pi$ соответствует как раз числу $-x$.

> Однозначность извлечения корня навсегда теряется при переходе к комплексным числам!



2 ПРИМЕРЫ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Квадратные корни из чисел, лежащих на отрицательной полуоси вещественной оси, будут лежать на биссектрисе развернутого угла, а значит, на мнимой оси. Например, числа i и $-i$ — это квадратные корни из -1.

Из числа -5 квадратными корнями будут $i\sqrt{5}$ и $-i\sqrt{5}$.

Из числа i квадратными корнями будут

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

ВОПРОС

Почему нельзя назначить квадратным корнем только одно значение?

ОТВЕТ

Из соображений непрерывности функции извлечения квадратного корня, для соседних чисел значение функции должно мало отличаться. Тогда, если идти в обход плоскости, увеличивая аргумент комплексного числа, мы придем, наконец, к положительной полуоси вещественной оси с тем, что. например, $\sqrt{4}$ должен быть равен -2. Но для $\sqrt{4}$ более естественно было бы выбрать число 2.

Поэтому из любого комплексного числа $y \neq 0$ существует 2 квадратных корня, а $x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ — единственный корень.

КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим уравнение $x^3 = y$.

Очевидно корни должны иметь модуль равный кубическому корню из модуля y: $|x| = \sqrt[3]{|y|}$.

А аргументы находятся из уравнения:

$$\frac{1}{3}\arg y = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Получаем 3 различных корня:

$$x_1 = \sqrt[3]{|y|}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_2 = \sqrt[3]{|y|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right);$$

$$x_3 = \sqrt[3]{|y|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Эти точки лежат в вершинах равностороннего треугольника.

ФОРМУЛА МУАВРА

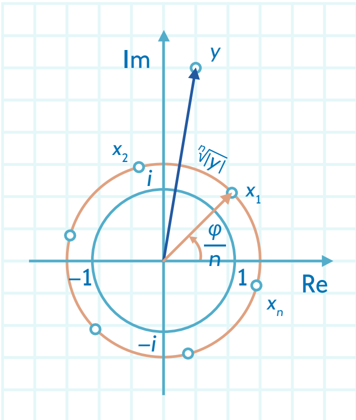
Для решения уравнения $x^n = y$, где $y \in \mathbb{C}$ существует общая формула, которую легко доказать на основе того, что мы уже знаем.

Пусть $y = |y|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arg y$.

Тогда $\sqrt[n]{y}$ — это множество n чисел вида:

$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{|y|}(\cos\psi_l + i\sin\psi_l)$,

где $l = \{1, \ldots, n\}$, $\psi_l = \dfrac{\varphi + 2\pi l}{n}$.



Эта формула называется **формулой Муавра**.

3 КОРНИ N-Й СТЕПЕНИ ИЗ 1

Рассмотрим корни из 1 3-й, 4-й и 7-й степеней.

1 ▶ $\sqrt[3]{1}$

Уравнение $x^3 = 1$ имеет в $\mathbb{C}$ три решения:

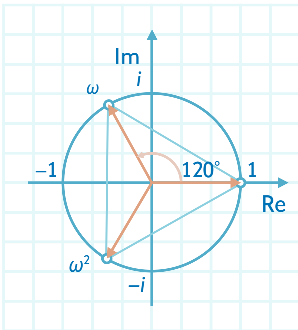
$x_1 = 1$;

$x_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$;

$x_3 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2 = \overline{\omega}$.

Эти числа лежат в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в единичную окружность.

Они интересны тем, что построенная на их основе числовая система используется при доказательстве великой теоремы Ферма.



Числа ω и ω^2 называются числами **Эйзенштейна**.

2 ▶ $\sqrt[4]{1}$

Уравнение $x^4 = 1$ порождает важнейшую систему чисел, на которой основаны гауссовы числа, которым будут посвящены несколько наших следующих уроков.

Оно имеет в $\mathbb{C}$ четыре решения: $\{1, i, -1, -i\}$.
Эти 4 точки на единичной окружности имеют аргументы, соответственно, 0°, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\pi = 180^\circ$ и $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ и лежат в вершинах квадрата.

3 ▶ $\sqrt[7]{1}$

Уравнение $x^7 = 1$ имеет 7 корней, которые являются вершинами правильного семиугольника, вписанного в единичную окружность.

Обозначим χ комплексное число, лежащее на единичной окружности и имеющее аргумент

$$\varphi = \frac{2\pi}{7}.$$

В тригонометрической форме $\chi = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$.

Тогда все корни уравнения $x^7 = 1$ будут степенями числа χ: $1 = \chi^0, \chi, \chi^2, \ldots, \chi^6$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Выполнено следующее равенство:

$x^7 - 1 = (x-1)(x-\chi)(x-\chi^2)\ldots(x-\chi^6)$.

Мы вернемся к этому равенству, когда будем изучать многочлены.