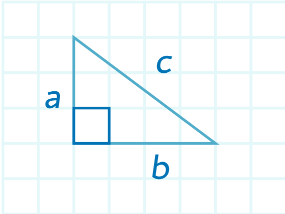
1 ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ НАЧАЛО

ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

Рассмотрим прямоугольный треугольник. Сторона, лежащая напротив прямого угла, называется гипотенузой, а две другие стороны — катетами.



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $a^2 + b^2 = c^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пифагоров треугольник — это прямоугольный треугольник, длины сторон которого есть целые числа (образуют пифагорову тройку).

Одна из древнейших задач математики: как найти все пифагоровы треугольники (пифагоровы тройки чисел)?

Самый простой пример пифагоровой тройки: 3, 4, 5.

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Понятно, что при умножении всех трех чисел на один и тот же множитель, снова получим пифагорову тройку:

$n^2 a^2 + n^2 b^2 = n^2 c^2$.

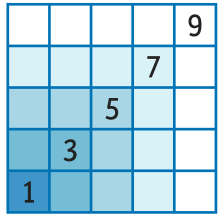
Вопрос: как еще можно получать серии пифагоровых троек?

СЕРИЯ «СУММА НЕЧЕТНЫХ»

Вспомним задачу из урока 1 нашего курса:
Сумма подряд идущих нечетных чисел всегда образует квадрат числа: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots. + (2n - 1) = n^2$

Значит, если $2n - 1$ является квадратом некоторого числа, то сумма всех идущих перед ним — тоже квадрат, и результат — тоже квадрат.

Имеем: $a^2 + b^2 = (a + 1)^2$.



Какие квадраты есть в последовательности нечетных чисел?

Например, 9.

Значит, $b^2 = 9$, $a^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \Rightarrow$
$a = 4$, $b = 3$, $a + 1 = 5$.
Получили известную тройку: 3, 4, 5.

Следующее нечетное число, которое является квадратом, это 25.

По формуле $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$
Значит, $b^2 = 25 = 2n + 1 \Rightarrow n = 12$, $a = 12$, $b = 5$, $a + 1 = 13$.
Получили тройку: 5, 12, 13.

Следующее нечетное число, которое является квадратом, это 49.

$b^2 = 49 = 2n + 1 \Rightarrow n = 24$, $a = 24$, $b = 7$, $a + 1 = 25$.
Получили тройку: 7, 24, 25.

Таким образом, мы получили бесконечную серию пифагоровых троек.

У всех треугольников этой серии один из катетов на 1 короче гипотенузы.

2 СЕРИЯ «УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ»

Рассмотрим еще одну интересную серию, состоящую из «почти равнобедренных» прямоугольных треугольников. Серии из равнобедренных прямоугольных треугольников не бывает, т.к. гипотенуза такого треугольника больше катета в $\sqrt{2}$ раз.

Пусть $a^2 + (a + 1)^2 = b^2$. Отсюда

$2a^2 + 2a + 1 = b^2$

$4a^2 + 4a + 2 = 2b^2$

$(2a + 1)^2 - 2b^2 = -1$.

Мы получили уравнение: $y^2 - 2x^2 = -1$.
Это частный случай уравнения Пелля:
$y^2 - mx^2 = 1$, где $x, y \in \mathbb{Z}$.

Это уравнение имеет бесконечную серию решений, на которой и основана соответствующая серия пифагоровых троек.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Достаточно найти самый маленький треугольник серии, а все остальные будут подобны ему.

Если a, b, c — минимальная пифагорова тройка, то $\text{НОД}(a, b, c) = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ

$\text{НОД}(a, b, c) = 1 \Rightarrow$
$\text{НОД}(a, b) = 1$, $\text{НОД}(b, c) = 1$, $\text{НОД}(a, c) = 1$.

Действительно, пусть, например, $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, но при этом $\text{НОД}(b, c) \neq 1$.

Тогда существует простое число p такое, что $b^2 \vdots p$, $c^2 \vdots p$.

Но тогда $a^2 \vdots p$. Значит, $a \vdots p$. Тогда мы получим $\text{НОД}(a, b, c) = p$, противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ

В минимальной пифагоровой тройке c нечетно, а a и b имеют различную четность.

Действительно, рассмотрим равенство $a^2 + b^2 = c^2$ по модулю 4. Квадрат любого числа имеет остаток 0 или 1 по модулю 4. Из всех возможных сочетаний возможны только:
н + ч = н   и   ч + н = н.

Переходим к гауссовым числам:
$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = (a + bi)(a - bi)$.

$a + bi$ И $a - bi$ ВЗАИМНО ПРОСТЫ

ТЕОРЕМА

$\text{НОД}(a + bi, a - bi) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

От противного. Пусть существует простое число $\alpha + \beta i$, которое делит $a + bi$ и $a - bi$.

Тогда $\alpha + \beta i$ делит сумму и разность этих чисел:
$2a \vdots (\alpha + \beta i)$, $2b \vdots (\alpha + \beta i)$.

Есть 3 возможности для $\alpha + \beta i$.

1-й случай:

$\alpha + \beta i = q = 4k + 3 \in \mathbb{Z}$.

Тогда $2a \vdots q$, $2b \vdots q \quad \Rightarrow \quad a, b \vdots q$ — противоречие!

2-й случай:

$\alpha + \beta i = 1 + i$.

Тогда $\dfrac{a + bi}{1 + i} = \dfrac{(a + bi)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{a + b}{2} + \dfrac{b - a}{2} i$,

а это не может быть целым числом, т.к. a и b имеют различную четность. Противоречие!

3-й случай:

$\alpha + \beta i$ — гауссово простое.

Тогда $\mathrm{N}(\alpha + \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = p$ — простое число в $\mathbb{Z}$.
Если $2\mathrm{a} \vdots (\alpha + \beta i)$, то $\mathrm{a} \vdots (\alpha + \beta i)$.

Но тогда $\mathrm{a} \vdots (\alpha - \beta i)$. Эти числа взаимно просты, значит должно быть выполнено

$\mathrm{a} \vdots (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \quad \Rightarrow \quad a \vdots p$.

Аналогично получаем $b \vdots p$.
Но $\text{НОД}(a, b) = 1$, противоречие!

Значит, такого $\alpha + \beta i$ не существует.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

На следующем уроке мы найдем все пифагоровы тройки, воспользовавшись этим результатом.